Физика.

– наука об элементарных процессах в природе.

Механика.

– наука о движении тел.

Основные абстракции механики:

1) материальная точка – тело, размерами кот. можно пренебречь
2) абс. твердое тело – система матер. точек, расстояние между кот. всегда остается неизменным.
3) сплошная среда – среда, дискретностью которой можно пренебречь (воздух, вода и т.п.)

§1. Кинематика материальной точки.

Кинематика – раздел механики, где изучается движение без рассмотрения его причин.

Механическое движение – перемещение одного тела относительно другого.

Тело отсчета – тело, относительно которого рассматривают движение.

Относительность – различие движений одного и того же тела относительно разных тел отсчёта.

Траектория – линия, по которой движется материальная точка.

Путь – длина траектории

Задача кинематики: математически точно описать движение точки.

Механическое движение.

1) **Измерение расстояния:** чтобы измерить расстояние нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон.

X метр [м]

Современное определение метра: метр – расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{300\,000\,000}$ $(3 \cdot 10^8)$ (c) доли секунды

2) **Измерение промежутков времени:** чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, взятого за эталон

секунда

Совр. опр.: секунда – это продолжительность $= 10^{10}$ колебаний электрона в атоме цезия.

Закон движения по прямой:

$x = x(t)$, t – время (с)

Движение точки на плоскости:

Декартова система координат – пара взаимно перпендикулярных осей, имеющих общее начало.



$x = x(t)$

$y = y(t)$

Движение точки в пространстве



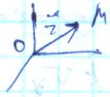
$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

Система отсчёта – система координат + часы

Радиус-вектор $\vec{r}$ точки – вектор проведенный от начала отсчёта к данной материальной точке.



$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон движения.

Орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ декартовой системы координат,



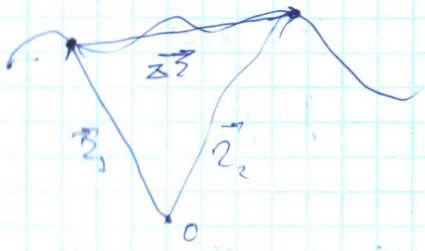
$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z.$

Модуль радиус-вектора $|\vec{r}| \equiv r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ [м]

Перемещение — разность радиус-векторов точки, взятых в 2 разных момента времени.

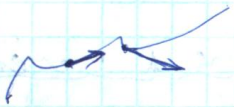
$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, т.е. $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$



Длительность перемещения $\Delta t = t_2 - t_1$ [с]

Скорость — предел отношения перемещения к его длительности, когда длительность стремится к 0.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



Скорость всегда напр. по кас. к траектории.

Декартовы компоненты скорости:

v_x, v_y, v_z (1) $\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$ [м/с]

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$

(2) $\vec{v} = \vec{i}\frac{dx}{dt} + \vec{j}\frac{dy}{dt} + \vec{k}\frac{dz}{dt}$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$, $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$.

$|\vec{v}| \equiv v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

Ускорение материальной точки — предел отношения приращения скорости к промежутку времени, когда промежуток времени стремится к 0

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

$\vec{v}_2 = \vec{v}_2(t)$, $\vec{v}_1 = \vec{v}_1(t)$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

Декартовы компоненты ускорения.

a_x, a_y, a_z

$\vec{a} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z) = \vec{i}\dot{v}_x + \vec{j}\dot{v}_y + \vec{k}\dot{v}_z$

$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}$

$a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}$

$a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$

[м/с²]

модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Пример: прямолинейное равноускоренное движение.

$x = x(t)$ $\quad a_x = const$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x_0} + a_x t \\ x(t) = x_0 + v_x t + \dfrac{a_x t^2}{2} \end{cases}$$

Пример: $v_{x_0} = 0,\ x_0 = 0.$

$$x(t) = \frac{a_x t^2}{2} \Rightarrow a_x = \frac{2x}{t^2}$$

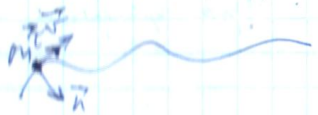
Свободное падение

опыт $a = g = 9{,}8$ м/с^2

Криволинейное движение

Тангенсальное и нормальное — так называют проекции ускорения на естественные оси координат.

Естественные оси — оси, одна из которых ∥ вектору скорости точки, а другая ⊥ скорости и направлена к центру кривизны траектории данной точки.

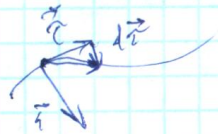


$$\vec a = \vec\tau a_\tau + \vec n a_n$$

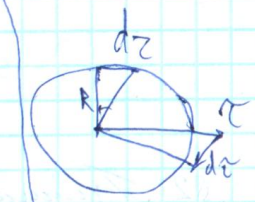
$$\vec\tau = \frac{\vec v}{v} \Rightarrow \vec v = \vec\tau \cdot |\vec v|$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec\tau v) = \vec\tau \cdot \dot v + \dot{\vec\tau} \cdot v$$

$$\dot{\vec\tau} = \frac{d\vec\tau}{dt}$$



$$d\vec\tau = \vec n\, d\tau$$



$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dr}{R}$$

$$d\tau = \tau \frac{dr}{R};\quad d\tau = \frac{dr}{R} \qquad d\vec\tau = \vec n \frac{dr}{R}$$

$$\dot{\vec\tau} = n \frac{1}{R} \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{=v} = \vec n \frac{v}{R}$$

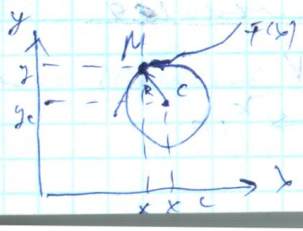
$$\vec a = \vec\tau \dot v + \vec n \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{a_\tau = \dot v,\quad a_n = v^2/R}$$

Круг кривизны: круг, проходящий через данную точку M на кривой и 2 другие точки на кривой N и P в пределе, когда $N \to M$ и $P \to M$



Пример:



$$|x - x_c|^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$y(x) = f(x),\quad y'(x) = f'(x)$$

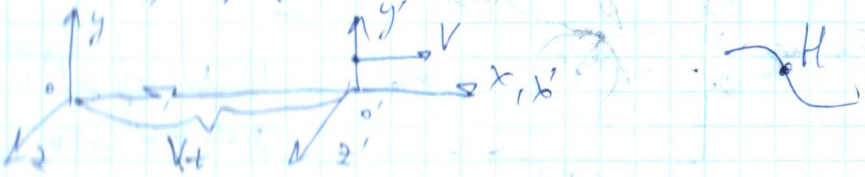
$$R = \frac{|1 + y'^2|^{3/2}}{|y''|}$$

§2 Принцип относительности.

Преобразования Галилея. Преобразование скорости. Принцип относительности Галилея: никакими механическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчёта нельзя установить покоится ли эта сис-ма в сост. покоя или равномерно прямолинейно движется.

Уравнения выражающие физ. законы должны быть инвариантны отн. преобразования, описывающего переход от неподвижной сис-мы отсчёта к сис-ме движущейся прямолинейно равномерно

Преобразования Галилея



$x = x' + Vt$; $y = y'$; $z = z'$

Правило сложения скоростей Галилея

$v_x = v_x' + V$; $v_y = v_y'$; $v_z = v_z'$.

$\vec{v}_{абс.} = \vec{v}_{отн.} + \vec{v}_{с.отн.}$

Оказалось, что ур-е электромагнитного поля не инвариантны отн. преобраз. Галилея. Решили проверить правило сложения скоростей Галилея для световых волн.

Опыт Майкельсона (1887 г.)



$V = 3 \cdot 10^4$ м/с

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \end{cases}$$

Продольная скорость света v_x': $v_y' = 0$;

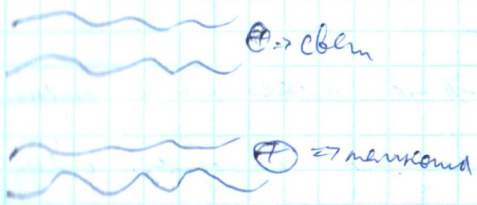
$v_x' = -V \pm c$, $|v_x'| = c \pm V$.

Поперечная скорость света v_y': $v_x' = 0$;

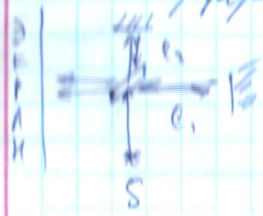
$v_y' = \pm\sqrt{c^2 - V^2}$; $|v_y'| = \sqrt{c^2 - V^2}$.

Интерференция света — взаимная компенсация действия 2-х световых волн в некоторых точках пространства.

Свет + свет = темнота.



Интерферометр Никельсона.



1) $\xrightarrow{V}$ $l_1 \rightarrow$

свет на экране

$$\frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V} = \frac{2 l_2}{\sqrt{c^2-V^2}}$$

2) $\xrightarrow{V}$ $l_2 \rightarrow$

темнота на экране

$$\frac{l_2}{c-V} + \frac{l_2}{c+V} = \frac{2}{\sqrt{c^2-V^2}} + \frac{T}{2};$$

$T = \frac{\lambda}{c}$, λ — длина световой волны.

$l_1 = l_2 = 10$ м.

В опыте небыло изменения интерференционной картины и Никельсон сделал вывод, что гипотеза неподвижного эфира явл-ся ошибочной.

Принцип постоянства скорости света:

скорость света не зависит от того по отношению к какой системе отсчёта (покоящейся или движущейся) она определяется

$v_{абс} = v_{отн.} = c$.

Эпитей предложил исп. этот принцип как исходный пункт новой теории — теории относительности.

Осн. идея — движение влияет на время (относительность времени).

$$\left.\begin{cases} x = ct \\ x' = ct' \end{cases}\right\} \text{ т.к. } x \neq x' \Rightarrow t \neq t' \ (!)$$

Преобразование Лоренца

$x, y, z, t \rightleftarrows x', y', z', t'$.

Испытаем ~~м~~ прямое преобразование

$x = x' + Vt'$, $y = y'$, $z = z'$; $t = t' + x'V/c^2$

Обратное преобр.: $\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t - xV/c^2 \end{cases}$ не вып.

Преобр. Лоренца: $\left(x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \; y' = y, \; t = t', \right.$

$\left(t = \frac{t' + x'V/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right.$

Обратное: $x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ $\quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Принцип относительности Эйнштейна.

Ур-я, выраж. физич. законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Ур-е электромагнитного поля удовл. этому принципу.

§3. Кинематика твердого тела.

1) Поступательное движение тела — движение, при котором ~~движение~~ ориентация тела в пр-ве остается неизменной. При этом скорости всех точек тела одинаковы.

$\vec{v}_i = \vec{v}$.

2) Вращение вокруг неподвижной оси — движение, при кот. все точки тела движ. по окружностям, а центры всех окружностей лежат на 1-ой прямой наз. осью вращения (прямой линии, на кот. лежат неподвижные точки тела).



Угол поворота φ

$\varphi = \varphi(t)$ — закон движения

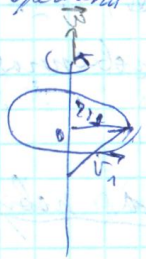


$\varphi = \frac{S}{R}$ — угол в радианах.

$S = R\varphi$

Угловая скорость вращения тела — производная угла поворота тела по времени

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \; \left(\frac{рад}{с}\right)$.

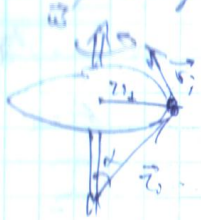


$dt \to dr_1 = r_{i1} d\varphi$

$v_i = \frac{dr}{dt} = r_{i1} \omega$

$v_i = \omega r_{i1}$

Вектор угловой скорости – вектор, направленный вдоль оси вращения тела по правилу правого винта, модуль кот. = угловой скорости.



$\vec{v}_i = [\vec{\omega}_i, \vec{r}_i]$

векторное произведение.

$v_i = \omega \underbrace{r_i \sin\alpha}_{r_{i\perp}} = \omega r_{i\perp}$.

3) Движение тела с одной неподвижной точкой

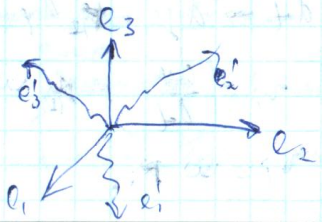
Т. Эйлера: движение тела с одной закрепленной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления.

$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$.

$\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость вращения

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

Матрица поворота тела



– матрица, переход которой $\vec{e}_i \to \vec{e}_i'$ ортогональные

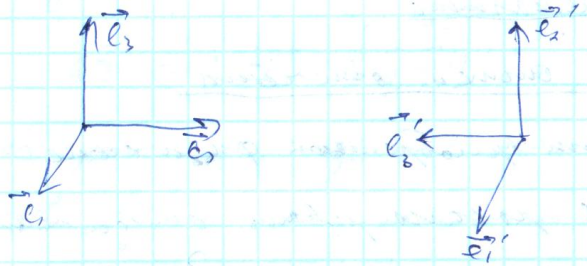
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты лаб. сис-мы,

$\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ – система тела

ортонормированных ортов этих 2-х сис-м координат.

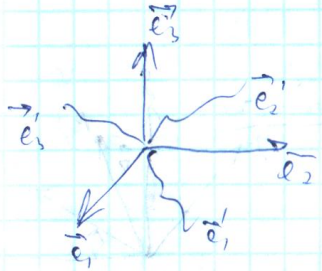
$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j'$, $i, j = 1, 2, 3$

$$S = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1' & \vec{e}_1\vec{e}_2' & \vec{e}_1\vec{e}_3' \\ \vec{e}_2\vec{e}_1' & \vec{e}_2\vec{e}_2' & \vec{e}_2\vec{e}_3' \\ \vec{e}_3\vec{e}_1' & \vec{e}_3\vec{e}_2' & \vec{e}_3\vec{e}_3' \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразование компонентов при повороте сис-мы отсчета



$\vec{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3 =$

$= \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_3' x_3'$

$x_1 = \vec{e}_1 \vec{e}_1' x_1' + \vec{e}_1 \vec{e}_2' x_2' + \vec{e}_1 \vec{e}_3' x_3' = \xi_{11} x_1' + \xi_{12} x_2' + \xi_{13} x_3'$

$x_i = \sum_j \xi_{ij} x_j'$

$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$

§4. Кинематика

Вращающиеся системы отсчёта

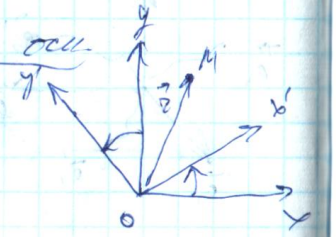
Какие особенности приобретают физические явления, если их рассматривать относительно вращающейся системы отсчёта?

Цель – найти связь между кинематическими характеристиками движения точки отн. неподвижной и вращающейся систем.

S – неподвижная сис-ма отсчёта

S' – вращающаяся с.о.

1) Вращение вокруг неподвижной оси



радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}'$.

$d\vec{r} = d\vec{r}'$ – перемещение отн. S'

Пусть $d'\vec{r}'$ – перемещ. отн. S'

Пусть $d'\vec{r}' = 0$ (неподв. отн. S')

§3 $\rightarrow \vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]$; $\vec{\omega}$ – угловая скорость

вращения сис-мы S'

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt = [\vec{\omega}, \vec{r}]\,dt$$

Если $d'\vec{r}' \neq 0$ (подв. отн. S')

$$d\vec{r} = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}]\,dt$$

$$d\vec{r}' = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']\,dt$$ – приращение

вектора отн. неподвижной сис-мы = изменению этого вектора отн. подвижной + изменение за счёт вращения сис-мы отсчёта.

аналогично $d\vec{v}' = d'\vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{v}']\,dt$

$$d\vec{A}' = d'\vec{A}' + [\vec{\omega}, \vec{A}']\,dt$$

$\vec{A}' = \vec{r}', \vec{v}', \ldots$

Скорость $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d'\vec{r}'}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{r}']$

$\vec{v}' = \dfrac{d'\vec{r}'}{dt}$ – скор. отн. S'

$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$

Ускорение $\rightarrow d\vec{v} = d\vec{v}' + [\vec{\omega}, d\vec{r}']$ (считаем $\vec{\omega}$ – const).

$d\vec{r} = d'\vec{r}' + [\vec{\omega}, \vec{r}']$

$$d\vec v' = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']$$

$$d\vec v = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']\,dt + [\vec\omega, d'\vec r'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r]]\,dt$$

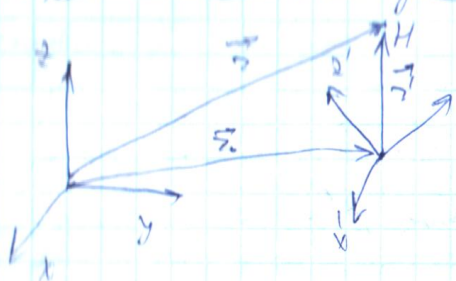
$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt}; \quad \vec a = \frac{d'\vec v'}{dt} + [\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, \frac{d'\vec r}{dt}] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']].$$

Обозначим $\vec a' = \frac{d'\vec v'}{dt}$

$$\vec a = \vec a' + 2[\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec r = \vec r' \\ &\vec v = \vec v' + [\vec\omega, \vec r'] \\ &\vec a = \vec a' + 2[\vec\omega, \vec r'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] \end{aligned}}$$

а) Вращение вокруг движущейся оси.



$\vec\omega = const$

$\vec r = \vec r_0 + \vec r'$

$\vec v_0 = \frac{d\vec r_0}{dt}$

$\vec a_0 = \frac{d\vec v_0}{dt}$

$$\begin{cases} \vec r = \vec r_0 + \vec r' \\ \vec v = \vec v_0 + \vec v' + [\vec\omega, \vec r'] \cancel{dt} \end{cases}$$

$$\vec a = \vec a_0 + \vec a' + 2[\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r]]$$

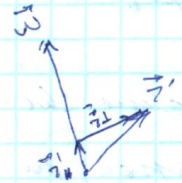
Переносное и кориолисово ускорение.

$a_n = \vec a_0 + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$ – переносное

$a_k = 2[\vec\omega, \vec v']$ – кориолисово.

$\vec a = \vec a' + \vec a_n + \vec a_k$.

Центростремительное ускорение.



$\vec r' = \vec r'_\parallel + \vec r'_\perp$

$[\vec\omega, \vec r'] = \underbrace{[\vec\omega, \vec r'_\parallel]}_{=0} + [\vec\omega, \vec r'_\perp]$

$$[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] = [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r_\perp]] =$$

$$= \vec\omega \underbrace{(\vec\omega, \vec r_\perp)}_{=0} - \vec r'_\perp \omega^2 = -\omega^2 \vec r'_\perp$$

$\vec a_{цс} = -\omega \vec r'_\perp$ – центростремительное ускорение.

§5 Законы Ньютона.

I з-н: $\exists$ сис-мы отсчёта, относительно которых всякое тело, бесконечно удалённое от других тел не испытывает ускорение. Такие сис-мы наз. инерциальными.

II з-н: Произведение $m \cdot \vec a$ (мат. точки) равно действующей

на неё силы.

$\vec{F} = m\vec{a}$

III з-н: Действия двух тел друг на друга равны и противоположно направленны.

$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

Законы Ньютона – обобщение опытных данных (опыты Галилея, Гюгенса, законы Кеплера)

1) Как показывает опыт, сис-ма отсчёта, связанная с землей явл-ся инерциальной, по крайней мере приближенно.

2) Массой наз-ся мера отклика тела на действие силы.

Сила – мера действия на данное тело других тел.

Как измерить силу и массу?

Введем ед. массы, которая в системе СИ наз-ся 1 килограмм – масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава машины и лимите диаметром 39 мм и такой же высоты.



$m_{эт} = 1$ кг.

Введем ед. изм. силы 1 Н – это сила, которая вызывает ускорение $1\ м/с^2$ у тела массой в 1 кг.

$F_{эт} = 1\ Н = 1\ м \cdot 1\ м/с^2$



$F_{эт}$

Измерение массы: подействуем на тело силой в 1 Н и измерим ускорение.



$F_{эт}$ (a_1) $m = \frac{F_{эт}}{a_1}$

Пример: $a_1 = 2\ м/с^2$,

$m = \frac{1\ Н}{2\ м/с^2} = 0{,}5$ кг.

Измерение силы: подействуем на тело массой 1 кг и измерим ускорение.



$F\ (a_2)$, $F = m_{эт}\, a_2$

Пример: $a_2 = 3\ м/с^2$

$F = 1\ кг \cdot 3\ м/с^2 = 3\ Н$

$m\vec{a} = \vec{F}$ – применима к любым силам

и к массам, а не только к эталонам.

Пример: $a = \frac{F}{m} = \frac{3Н}{0,5кг} = 6\ м/с^2$

Ограничение II з-на: 1) он теряет силу при очень больших скоростях, а именно при $v \to c$;

2) не действует для очень маленьких тел, т.к. электронов в атомах;

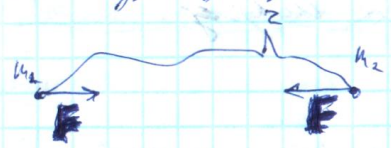
3) Силы взаимодействия, приложенные к разным телам направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

§6. Силы в механике.

Силы в природе: гравитационные, электромагнитные, сильные ($\leq 10^{-15}$ м) и слабые ($\leq 10^{-15}$ м).

$n \to p + e + \nu$ (β – распад)

Закон всемирного тяготения: $\forall$ две материальные точки притягивают друг друга с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояний между ними.



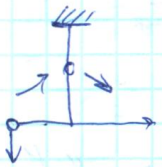
$F = \frac{m_1 m}{r^2}$;

G – гравитационная постоянная

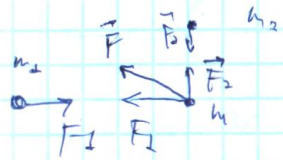
$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$.

Опыт: $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \frac{Н \cdot м^2}{кг^2}$

Опыт Кавендиша (1785 г.)



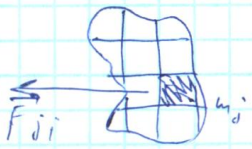
Принцип суперпозиции: каждая пара частиц взаимодействует независимо.



$\vec{F} = \vec{F}_3 + \vec{F}_2$.

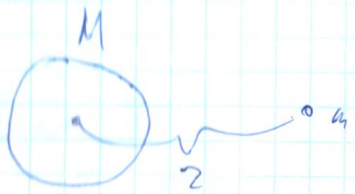
$F = \sum_i F_i$.





$\vec{F} = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}$

Притяжение точки к шару



$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Взвешивание земли.



$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg$$

$$M = \frac{R^2 g}{G}.$$

$g = 9{,}8\ м/с^2$; $R = 6400\ км$; $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{Нм^2}{кг^2}$

Имеем $M = 6\cdot 10^{24}\ кг$.

$S = R\varphi$



Факты, подтверждающие закон всемирного тяготения:

1) ускорение свободного падения одинаково для всех тел вблизи поверхности земли;

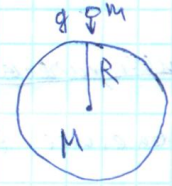
2) период обращения луны;



$$ma = F$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$



$$mg = F = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v};$$

$$v^2 = G\frac{M}{r}; \quad v = \sqrt{G\frac{M}{r}};$$

$$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{gR^2}};$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{R}\sqrt{r/g}}$$

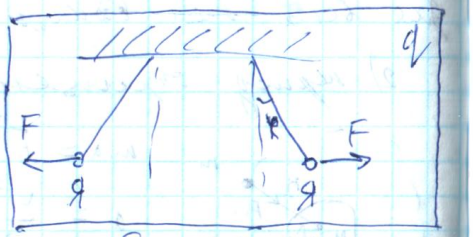
$$\begin{cases} r = 384000\ км \\ R = 6400\ км \\ g = 9{,}8\ м/с^2. \end{cases}$$

$T \approx 30$ суток

Электромагнитные силы.

I. Электрическая (сила Кулона)

Электрический заряд - мера электрического взаимодействия тел



Электрическое поле - поле, создаваемое электрическими зарядами и проявляющееся себе действием на электрический заряд.

Напряженность электр. поля - мера действия поля на заряд.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}; \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

II. Магнитная сила (Лоренца).

$$\vec{F} = q\,[\vec{v}, \vec{B}]$$

$\vec{B}$ - магнитная индукция

Полная сила

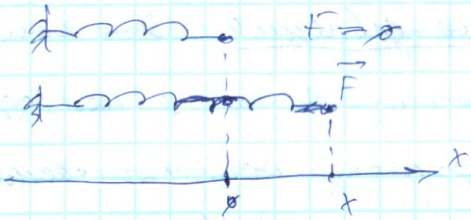
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\,[\vec{v}, \vec{B}]$$ - сила Лоренца.

Сила упругости

= сила, препятствующая деформации других тел.

Упругое - тело, стремящееся восстановить свою форму после прекращения действия сил.

Закон Гука.



Опыт: $F_x = -kx$.

k = const - коэфф. упругости

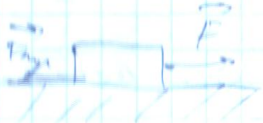
$$[k] = \frac{H}{м}$$

Сила трения.

I. Сила сухого трения

Сила трения - сила препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел.

II. Трение покоя - трение в отсутствии перемещения соприкасающихся тел.



$\vec{F} + \vec{F}_{тр} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{F}_{тр} = -\vec{F}}$

Как показывает опыт, сила трения покоя ограничена некоторым макс. значением: $F_{тр} \le F_{max}$

Сила нормального давления – это составляющая силы взаимодействия тел перпендикулярная поверхности соприкосновения.

Опыт показывает: $F_{max} = \mu N$

$\mu = const$ – коэфф. трения [1]



R – сила реакции

Сила трения – сост. силы реакции || поверхности.

III. Трение скольжение – трение при наличии относительного перемещения соприкасающихся тел.

Опыт показывает $F_д = \mu N$.

IV. Вязкое трение – трение, препятствующее движению тела в страшной среде.

1) для такого трения нет трения покоя;

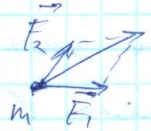
2) она зависит от скорости.

Опыт показывает, что $F_{тр} \sim v$, если v мал



$\vec{F}_{тр.} = \alpha \vec{v}$.

Если на материальную точку действует сразу 2 силы, то она начинает двигаться так, как если бы действовала 1 сила равная векторной сумме двух сил



$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

Импульс материальной точки – это произведение массы материальной точки на её скорость.

$\vec{p} = m\vec{v}$ $\left[\frac{кг \cdot м}{с}\right]$

Релятивистское уравнение движения.

– ур-е движения тел с очень большими скоростями, соизмеримыми с v света.

$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ – релятивистский импульс

m – масса тела, v – скорость, c – скор. света.

$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$ – сила Лоренца

§ 7. Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции.

Неинерциальной явл-ся в сис-ме, кот. движ. ускоренно отн. поверхности земли.

Введем ур-е движения тела в неинерциальной системе.

S – инерциальная с.о.

S' – неинерциальная с.о.

$m\vec{a} = \vec{F}$ (S)

$m\vec{a} + m\vec{a}' - m\vec{a}' = \vec{F} \Rightarrow$

$\Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ин}$, где $\vec{F}_{ин} = -m(\vec{a} - \vec{a}')$ –

– сила инерции – добавочная сила, действующая на матер. точку в неинерц. сис-ме отсчёта и определяемая формулой ⊛; где m – масса м.т.; $\vec{a}$ – ускорение отн. ИСО; $\vec{a}'$ – ускорение отн. НИСО.

§ 4 $\rightarrow \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{кор}$

$\vec{a}_n = \vec{a}_0 - \omega^2 \vec{r}_1'$ – переносное ускорение,

$\vec{a}_{кор} = 2[\vec{\omega}, \vec{v}']$ – кориолисово ускорение.

Подставим в ⊛:

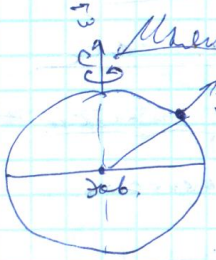
$\vec{F}_{ин} = \vec{F}_n + \vec{F}_к$,

$\begin{cases} \vec{F}_n = -m\vec{a}_0 + m\omega^2 \vec{r}_1' \text{ – переносная сила инерции} \\ \vec{F}_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] \text{ – кориолисова с. и.} \end{cases}$

Центробежная сила инерции: $\vec{F}_{ц.б.} = m\omega^2 \vec{r}_1'$

Невесомость – исчезновение веса тела, вызванное неинерциальностью системы отсчёта.

Перегрузка – возрастание веса тела, вызванное неинерциальностью с.о.



$\vec{F}_к = -2m[\vec{\omega}, \vec{v}'] =$

$= -2m[\vec{\omega}_1, \vec{v}']$

в пл. плоскости:



Свойства сил инерции.

(1) Эти силы отличны от нуля только для неинерциальной связанной системой отсчета.

(2) Дают ускорение тело, со стороны которого приложена сила инерции.

Силы инерции не подчиняются II-му закону Ньютона.

§8. Импульс системы

Теорема Движение центра масс

Импульс материальной точки — произв. массы точки на ее скорость.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad [1\,кг \cdot \frac{м}{с}]$$

$$\dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{F}}$$

Скорость изм. импульса материальной точки равна действующей на нее силе.

Импульс системы — сумма импульсов отдельных частиц системы.

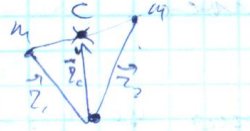
$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i < \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Центр масс системы частиц — точка, радиус-вектор которой опр-ся формулой

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i,$$

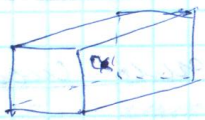
$m = \sum_i m_i$ — полная масса системы.

Пример.

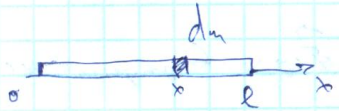


$$\vec{r}_c = \frac{m\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{2m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}$$









$$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i \qquad dm = \frac{dx}{l} m$$

$$x_c = \frac{1}{m} \int x\, dm$$

$$x_c = \frac{1}{l} \int_0^l x\, dx = \frac{l^2}{2l} = \frac{l}{2}.$$

$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\,\rho\,dV$, $\rho = \frac{m}{V}$ – плотность

Скорость и ускорение центра масс.

$\vec{v}_c = \dot{\vec{r}}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v}_i$.

$\vec{a}_c = \dot{\vec{v}}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{a}_i$.

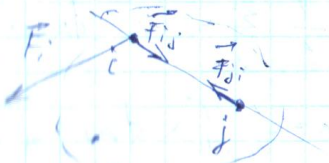
Импульс системы: $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_c$

$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_c}$, т.е.

Импульс произвольной сис-мы равен произведению массы сис-мы на вектор скорости центра масс.

Закон движения центра масс.

Внутренние силы системы частиц – силы взаимодействия между частицами системы.



$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ – внутренние силы

Сумма для $\forall$ 2-х частиц внутренних сил равна $\vec{0}$ $(\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = \vec{0})$ по III-му закону Ньютона.

$\Rightarrow \sum$ внутренних сил $= \vec{0}$ и для всей системы в целом: $\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \vec{0}$.

Внешние силы – силы, действующие на тела сис-мы со стороны тел, не входящих в данную сис-му – $\vec{F}_i$.

$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij}$ $\quad (\Sigma_i)$

$\sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{f}_{ij}}_{\vec{0}}$.

$\boxed{m\vec{a}_c = \vec{F}_{вн.}}$, т.е.

Центр масс сис-мы движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса сис-мы и к ней были бы приложены все внешние силы.

§9. Закон сохранения импульса.

Закон изменения импульса сис-мы.

Импульс сис-мы $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

$\vec{p}' = \sum_i m_i \vec{v}_i' = \sum_i m_i \vec{a}_i = m\vec{a}_c = \vec{F}_{вн.}$

$\boxed{\vec{p}' = \vec{F}_{вн.}}$, т.е.

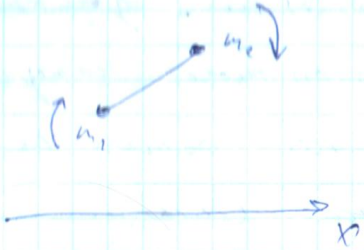
Скорость изм. импульса системы равна сумме внешних сил.

Если сумма внешних сил $= 0$, то импульс механической системы сохраняется.

Если $\vec{F}_{вн.} = 0$, то $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = const$.

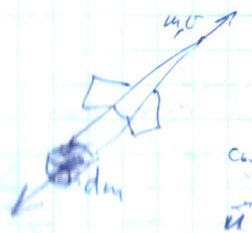
Если $\exists$ такая ось в проекции на которую $\sum_i \vec{F}_{вн_i} = 0$, то в направлении этой оси импульс сис-мы сохраняется.

Если $\vec{F}_{вн.}^{(x)} = 0$, то $p_x = \sum_i m_i v_{ix} = const$.



$$p_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = const.$$

Реактивное движение



$$m\vec{v} = (m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + \vec{u}\,dm$$

скорость воды.

$\vec{u} = \vec{v} + \vec{c}$, $\vec{c}$ – скор. воды отн. ракеты.

$$m\vec{v} = m\vec{v} + m\,d\vec{v} - \cancel{\vec{v}\,dm} - dm\,d\vec{v} + \cancel{\vec{v}\,dm} + \vec{c}\,dm$$

$$0 = m\,d\vec{v} - \underbrace{dm\,d\vec{v}}_{\to 0} + \vec{c}\,dm;$$

$$m\,d\vec{v} = -\vec{c}\,dm \quad | \,/dt;$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{c}\frac{dm}{dt};$$

$$m\dot{\vec{v}} = -\vec{c}\,\dot{m}.$$

$\dot{m} = \mu$ – скорость расхода массы $\left|\frac{кг}{с}\right.$

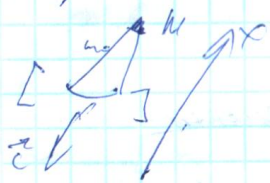
$$\boxed{\vec{F} = -\vec{c}\mu}$$ – реактивная сила.

Пример. ракета „Энергия".

$c = 3\ \frac{км}{с}$, $\mu = 10$ тонн/с

$$F_p = \mu c = 10^4\frac{кг}{с}\cdot 3\cdot 10^3\frac{м}{с} = 3\cdot 10^7\ Н$$

Стартовая масса ракеты



$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = -\mu\vec{c}$$

$$m\frac{dv}{dt} = \mu c.$$

$$m = m(t) = m_0 - \mu t$$

$$(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu c;$$

$$\int_0^v \frac{dv}{c} = \int_0^t \frac{\mu\,dt}{\underbrace{m_0 - \mu t}_{x}} \Rightarrow \frac{v}{c} = -\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dx}{x},$$

$$\frac{v}{c} = -\ln\frac{m}{m_0} = \ln\frac{m_0}{m};$$

$\frac{m_0}{m} = e^{v/c} \rightarrow \boxed{m_0 = m e^{v/c}}$

Пример. р. «Энергия». $m = 100$ тонн. $v = 8$ км/с

$c = 2{,}7$ км/с

$\rightarrow m_0 = 2000$ тонн (!).

Фотонная ракета.



$F_{p_1} = \frac{P}{c}$

Пример. $F_p = 1$ Н.

$P = F_p c = 1\,Н \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{м}{с} = 3 \cdot 10^8$ Вт.

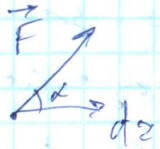
свет

§10. Работа и [redacted]ционная энергия.

Элементарная работа – скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы.

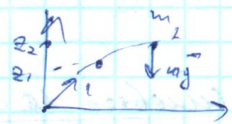
$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (1 Н·м = 1 Дж)

Полная работа – сумма элементарных работ. $A = \int dA$.



$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$

Пример: работа сила тяжести.



$dA = \vec{F}\,d\vec{r} = F_z\,dz = -mg\,dz,$

$A = \int dA = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_1 - z_2).$

Силовое поле – если ~~работа~~ сила, действ. на мат. точку зависит только от координат точки, но не зависит от её скорости, то сила образует силовое поле.

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ Примеры: сила тяжести, сила упругости, сила Кулона.

Не образуют силовых полей сила трения, сила Л...

Потенциальное силовое поле — если работа силы, действ. на мат. точку = 0 при перемещении точки по любому замкнутому контуру, то сила наз-ся потенциальной (силовое поле соответственно).



7. Условие потенциальности силового поля.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0.$$

Потенциальная энергия.

Элементарная п. э. — работа потенциальной силы, взятая со знаком „-".

$$d\Pi = -dA_n.$$

Потенциальная энергия — сумма эл. потенциальных энергий.

$$\Pi = \int d\Pi;$$

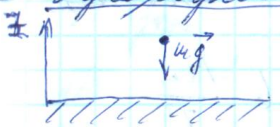
$$\Pi = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = \Pi(\vec{r}, \vec{r}_0).$$

Эта функция определена только для потенциальных сил.

$\Pi(\vec{r}_0) = 0$, $\vec{r}_0$ — точка начала отсчета п. э.

Примеры силовых полей:

① Однородное поле тяготения.



$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F} d\vec{r} = -mg\, d\vec{r} = mg\, dz$$

$$\Pi = \int d\Pi = mg \int_{z_0}^{z} dz = mg(z - z_0).$$

$$z_0 = 0 \Rightarrow \Pi = mgz = mgh$$

② Тело в поле тяготения.



Пот. энергия системы частиц — сумма п. э. отдельных частиц системы.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

$$\Pi_i = m_i g (z_i - z_0), \quad z_0 = 0.$$

$$\Pi = g \sum_i m_i z_i = g m z_c; \text{ где } z_c = \frac{1}{m} \sum m_i z_i; m$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i, \quad m = \sum_i m_i$$

Потенц. энергия тела такова, как если бы вся масса тела находилась бы в его центре масс.

③ Сила упругости.

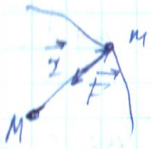


$F_x = -kx$ (закон Гука)

$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F} d\vec{r} = kx\, dx$$

$$\Pi = \int_{x_0}^{x} d\Pi = k \int_0^x x\, dx = \frac{kx^2}{2}.$$

(4) Центральное силовое поле — поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром.



$$\vec{F} = -F\frac{\vec{r}}{r}, \quad F = G\frac{M_m}{r^2}$$

$$d\Pi = -\vec{F}d\vec{r} = F\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r}$$

$$\vec{r}\,d\vec{r} = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2) = \frac{d(r^2)}{2} =$$

$$= r\,dr. \qquad \boxed{\vec{r}\,d\vec{r} = r\,dr}$$

Сила. пропорц. обратна на его ускорение = пропорц. (величина) на (ускорение).

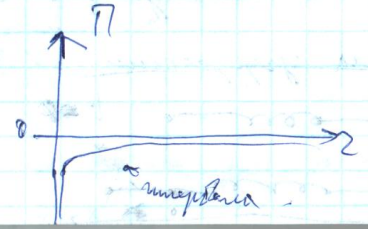
Аналогично $\vec{v}\,d\vec{v} = v\,dv$.

$$d\Pi = \frac{F}{r}\vec{r}\,d\vec{r} = \frac{F}{r}r\,dr = F\,dr = G\frac{M_m}{r^2}dr.$$

$$\Pi = \int d\Pi = GM_m\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = GM_m\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right).$$

Положим, что $r_0 \to \infty$

$$\boxed{\Pi(r) = -\frac{GM_m}{r}}$$



Внутренние силы через потенциальную энергию.

$\Pi(\vec{r})$ дана, $\vec{F}(\vec{r})$ — ?

$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F}d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz$$

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}.$$

(частная производ. — производ. когда берется производная только по одной переменной, значения всех величин кроме той по которой дифференцируем.)

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z,$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\Pi$$

$$\operatorname{grad} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$ — градиент.

§11. Кинетическая энергия. Закон сохр. энергии в механике.

Кинет. энергия мат. точки: $K = \frac{mv^2}{2}$, m — масса точки, v — её скорость. [Н·м = Дж]

Теорема об изменении кинетической энергии.

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad | \cdot d\vec{r}$ скалярно.

$m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = \vec{F}\, d\vec{r} = dA$

$m \vec{v}\, d\vec{v} = dA;$

$dA = m v\, dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$

$\boxed{dK = dA}$

Приращение кинетической энергии точки равно эл. работе, действующей на неё сил.

Кинетическая энергия системы частиц - это сумма кинетических энергий отдельных частиц системы.

$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$

1) *Поступательное движение твердого тела.*

$\vec{v}_i = \vec{v}.$

$K = \frac{mv^2}{2}$, где m - масса тела.

2) *Вращение тела вокруг неподвижной оси.*



ω - угловая скорость

$\S 3 \rightarrow v_i = \omega r_{i\perp}$

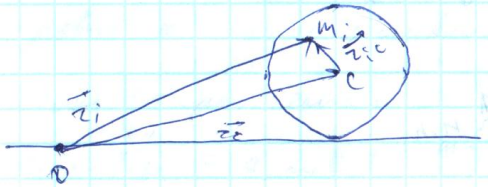
$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_{i\perp})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

Сумма - это не характеристика тела по отношению к данной оси.

$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$ - *момент инерции тела* относительно данной оси.

$\boxed{K = \frac{I\omega^2}{2}}$

3) *Плоское движение твердого тела* - движение, при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости.



$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_{ic}.$

$\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i$

$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})^2$

$(\vec{v}_c + \vec{v}_{ic})^2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \vec{v}_c \underbrace{\sum m_i v_{ic}}_{0} + \frac{1}{2} \sum m_i v_{ic}^2$

$\left(\sum_i m_i \vec{v}_{ic} = \sum_i m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i\vec{v}_i - m\vec{v}_c = 0\right)$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$ – Теорема Кёнига.

Полная механическая эн. сис-мы – это сумма кинетической и потенциальной энергии системы. $E = K + \Pi$.

Закон изменения полной энергии:



$$dK = dA$$
$$dA = \vec{F}\, d\vec{r}$$
$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_{н.п}$$
$$\Rightarrow dK = dA_n + dA_{н.п}$$
$$dA_n = \vec{F}_n d\vec{r}, \quad dA_{н.п} = \vec{F}_{н.п} d\vec{r}$$
$$dA_n = -d\Pi$$
$$dK = -d\Pi + dA_{н.п}$$
$$d(K + \Pi) = dA_{н.п}$$
$$dE = dA_{н.п}$$

Приращение полной мех. энергии точки равно эл. работе непотенциальных сил.

Такая же утв. верна и для сис-мы частиц.

Закон сохр. энергии: если работа н.п. сил равна 0, то полная механическая энергия сис-мы сохраняется.

Если $A_{н.п} = 0$, то $E = K + \Pi$ сохраняется (= const)

Импульс и энергия в теории относительности

Закон сохр. импульса: если сумма внешних сил = 0, то релятивистский импульс системы сохраняется.

Если $\vec{F}_{вн.} = 0$, то $\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$, $\vec{p} = \text{const}$

Закон. сохр. энергии в Т.О.: если сумма внешних сил равна 0, то релятивистская энергия системы сохраняется.

Если $\vec{F}_{вн} = 0$, то $E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$; c – v света, $E = \text{const}$.

$\vec{p}$ – релятив. импульс с., E – релят. энергия.

З.С.Э. явл. следствием закона сохр. импульса и принципа относительности.

В Т.О. эти 2 закона всегда действуют вместе.

Пример (неупругий удар)



$\Rightarrow M, V$

$$\begin{cases} \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{M\vec{V}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{cases}$$

$\Rightarrow V = 0.$ $\quad M = \dfrac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $(>2m!)$

Замечание: возм. взаимное превращение массы и энергии.

Факты, подтверждающие теорию относительности.

① Деление ядра урана.



$E = c^2 \Delta m$

$\Delta m = m - (m_1 + m_2)$ – дефект масс

② Световое давление

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$E\vec{v} = \vec{p}c^2$

$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$

Положим $m = 0$; $\Rightarrow E = pc$; $\underline{v = c}$

фотон

Сила светового давления $F = \dot{p} = \dot{E}/c = \mathcal{P}/c$,

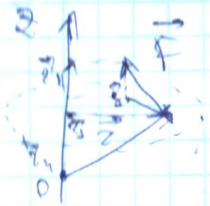
где $\mathcal{P}$ – мощность света.

Пусть $\mathcal{P} = 10^3$ Вт, $c = 3\cdot10^8$ м/с

$F = \frac{10^3}{3\cdot10^8}$ Н $= 3\cdot10^{-6}$ Н

§12. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

~~Момент импульса частицы~~ наз-ся векторное произведение радиус-вектора частицы на её импульс.



$\vec M = [\vec r, \vec F]$

$\begin{cases} \vec r = \vec r_\parallel + \vec r_\perp \\ \vec F = \vec F_\parallel + \vec F_\perp \end{cases}$

$\vec M = [\vec r_\parallel + \vec r_\perp, \vec F_\parallel + \vec F_\perp] = \underbrace{[\vec r_\parallel, \vec F_\parallel]}_{=0} + [\vec r_\parallel, \vec F_\perp] + \underbrace{[\vec r_\perp, \vec F_\parallel]}_{\vec M_\perp} + \underbrace{[\vec r_\perp, \vec F_\perp]}_{\vec M_\parallel} \Rightarrow \boxed{\vec M_\parallel = [\vec r_\perp, \vec F_\perp]}$

Аналогично $\vec N_\parallel = [\vec r_\perp, m\vec v_\perp]$ и

$\vec N_\parallel = \sum_i [\vec r_{i\perp}, m_i \vec v_{i\perp}]$ – для сис-мы.

Вращение тела вокруг неподвижной оси.



$\vec v_i = [\vec\omega, \vec r_{i\perp}]$ (§3)

$\vec v_i = \vec v_{i\perp}$

$\vec N_\parallel = \sum_i [\vec r_{i\perp}, m_i [\vec\omega, \vec r_{i\perp}]] =$

$= \sum_i m_i \{\vec\omega r_{i\perp}^2 - \vec r_{i\perp} \underbrace{[\vec r_{i\perp}, \vec\omega]}_{0}\} = \vec\omega \sum_i m_i r_{i\perp}^2 =$

– момент инерции тела отн. данной оси,

$J\vec\omega$

$J = \sum_i m_i \vec r_{i\perp}$

$\boxed{\vec N_\parallel = J\vec\omega}$

Плоское движение твёрдого тела

– движ. при сост. вне. точки движ. ∥ пос. плоск.

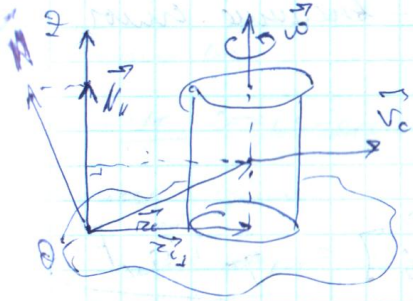
$\vec N = \vec N_c + \vec N_{oc}$.

Возьмём составляющие этих векторов ∥ их оси вращения

$\vec N_\parallel = \vec N_{c\parallel} + \vec N_{oc\parallel}$, где $\vec N_{c\parallel} = [\vec r_{c\perp}, m\vec v_c]$, $\vec v_c = \vec v_{c\parallel}$

$\vec N_{oc} = J\vec\omega$, $(J = J_c)$

$\boxed{\vec N_\parallel = [\vec r_{c\perp}, m\vec v_c] + J\vec\omega}$



§13. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульсов.

Одна мат. точка. $\vec N = [\vec r, m\vec v]$

Вычислим произв. по времени $\dot{\vec N} = \underbrace{[\dot{\vec r}, m\vec v]}_{0} + [\vec r \cdot m\dot{\vec v}] = [\vec r, \vec F] = \vec M$.

$\boxed{\dot{\vec{N}} = \vec{M}}$ – показывает, что:

Скорость изм. момента импульса системы равна моменту действ. на неё силы.

Сис-ма частиц.

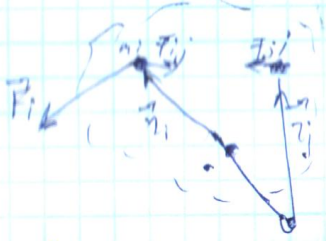
$$\vec{N} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]$$

$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\dot{\vec{r}}_i, m_i \vec{v}_i] + \sum_i [\vec{r}_i, m_i \dot{\vec{v}}_i] =$$

$= \dots$

f – внутренние силы

F – внешние силы



$$\dot{\vec{N}} = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] + \sum_j [\vec{f}_{ij}] = \underbrace{\sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i]}_{\vec{M}_{внеш}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_i [\vec{r}_i, \sum_j \vec{f}_{ij}]}_{\vec{M}_{внутр}}.$$

$$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{внеш} + \vec{M}_{внутр}.$$

Покажем, что $\vec{M}_{внутр.} = 0$.

Рассм. суммарный $\vec{M}_{внутр.}$ для одной пары частиц системы.

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}].$$

По III з-ну Ньютона $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$

$$\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, -\vec{f}_{ij}] = [\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_j}_{\parallel \vec{f}_{ij}}, \vec{f}_{ij}] = 0,$$

т.к. $\vec{r}_i - \vec{r}_j \parallel \vec{f}_{ij}$.

$\Rightarrow \vec{M}_{внутр} = 0$.

$\sum_i \sum_j \vec{M}_{ij}$

Закон изм. момента импульса сис

$\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{внеш.}$ – скорость изм. момента импульса сис-мы = сумме моментов внешних сил.

З-н сохранения момента импульса

Если сумма моментов внешних сил = 0, то момент импульса сис-мы сохраняется.

Если $\vec{M}_{вн.} = 0$, то $\vec{N} = \sum [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i] = \text{const}$.

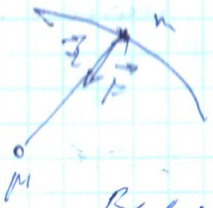
З-н сохр. момента импульса относ. оси:

Если $\exists$ некая ось, отн. которой сумма моментов внешних сил = 0, то изм. этой оси момента импульса системы сохраняется.

Если $M^{(z)}_{внешн.} = 0$, то $N_z = const$.

Движение частицы в центральном силовом поле.

Центральным с. полем наз. поле силы, напр. всегда в сторону одн. и той же точки, наз. силовым центром.



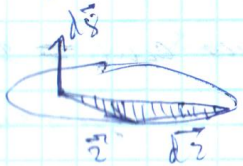
$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0.$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = const$$

Выводы: 1) движение в центральном поле является плоским;

2) в процессе движения сохраняется секторная скорость.

Секторная площадь $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}]$



Секторная скорость $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt}$.

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2m}[\vec{r}, m\vec{v}] = \frac{\vec{N}}{2m} = const$$

За равные промежутки времени радиус-вектор частицы описывает равные площади.



Солнце и комет Галея.

§14. Материальная точка в центральном поле

Законы Кеплера:

① Планеты солнечной системы двигаются по эллипсам, в общем фокусе которых находится солнце.

② За равные промежутки времени радиус-вектор планеты очерчивает равные площади.

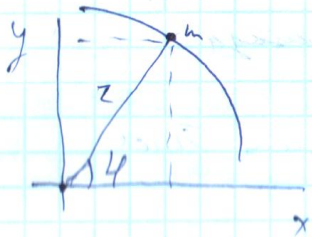
③ Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их

Эллиптические орбиты.

$$\begin{cases} K + \Pi = E = \text{const} \\ [\vec{r}, m\vec{v}] = \vec{N} = \text{const} \end{cases}$$

$K = \frac{mv^2}{2}$; $\Pi = -G\frac{Mm}{r^2}$. Будем считать $A = GMm$.

Тогда $\Pi = -\frac{A}{r}$.



r, φ – полярные координаты.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$$

$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

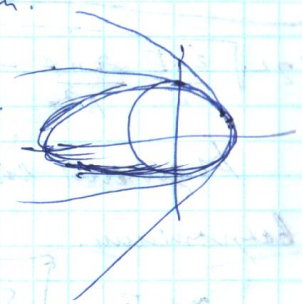
$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = m\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ \dot{x} & \dot{y} & 0 \end{vmatrix} = m\vec{k}(x\dot{y} - y\dot{x}) =$$

$$= \vec{k}\, mr^2\dot{\varphi} = \vec{k}\, N.$$

$$\begin{cases} N = mr^2\dot{\varphi} = \text{const} \\ E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{A}{r} = \text{const}. \end{cases}$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cdot\cos\varphi}; \quad p = \text{const} \text{ – фокальный параметр.}$$

ε – эксцентриситет. $\varepsilon = \text{const}$



1) $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ движение по окружности.

2) $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$ орбита – эллипс.

3) $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ парабола.

4) $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ гипербола.

$$\dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2}$$

$$\frac{2E}{m} = \dot{r}^2 + \frac{N^2}{m^2r^2} - \frac{2A}{mr}$$

$$\begin{cases} \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}} = \frac{dr}{dt} \\ \dot{\varphi} = \frac{N}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

Чтобы исключить время разделим 1-ое ур-е на 2-ое

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{mr^2}{N}\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}} =$$

$$= \pm r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2r} - \frac{1}{r^2}} = \frac{dr}{d\varphi}$$

– ур-е траектории в дифференциальной

Разделим переменные.

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2 r} - \frac{1}{r^2}}} = \pm d\varphi.$$

Введем новую переменную подстановкой.

$$s = \frac{1}{r} \qquad ds = -\frac{dr}{r^2}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} s - s^2}} = \mp d\varphi.$$

$$\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2} s - s^2 = \frac{2mE}{N^2} - \left(s^2 - 2s\frac{mA}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}\right) - \frac{m^2A^2}{N^4} =$$

$$= \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4} - \left(s - \frac{mA}{N^2}\right)^2 =$$

Обозначим $a^2 = \frac{2mE}{N^2} + \frac{m^2A^2}{N^4}$

$$x = s - \frac{mA}{N^2}$$

$$= a^2 - x^2; \quad dx = ds.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp d\varphi.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right);$$

$$\sin\psi = \frac{x}{a} \rightarrow \cos\psi\, d\psi = \frac{dx}{a} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, d\psi = \frac{dx}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}\, d\psi$$

$d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) = \mp d\varphi$. Сами величины отличаются не более чем на константу.

$$\arcsin\frac{x}{a} = \pm\varphi + \text{const}.$$

Положим $\text{const} = \frac{\pi}{2}$ и выберем угол $-$.

$$\arcsin\frac{x}{a} = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\frac{x}{a} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi;$$

$$x = a\cos\varphi.$$

$$x = \frac{1}{r} - \frac{mA}{N^2} = a\cos\varphi.$$

$$\frac{1}{r} = \frac{mA}{N^2} + a\cos\varphi;$$

$$r = \frac{1}{\left(\frac{mA}{N^2} + a\cos\varphi\right)} = \frac{N^2/mA}{1 + a\frac{N^2}{mA}\cos\varphi}.$$

$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$, где $p = \frac{N^2}{mA}$,

$\varepsilon = a\frac{N^2}{mA} = \frac{N^2}{mA}\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2a^2}{N^4}}$

$= \sqrt{1+\frac{2N^2E}{mA^2}}$

$$\boxed{p = \frac{N^2}{mA}, \quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2N^2E}{mA^2}}, \quad A = GmM}$$

При движ. по окружности $\varepsilon = 0$, $\Rightarrow \frac{2N^2E}{mA^2} = -1$,

Эллипс. $0<\varepsilon<1 \Rightarrow E<0$

Парабола $\varepsilon = 1 \Rightarrow \frac{2N^2E}{mA^2} = 0 \Rightarrow E = 0$

Гипербола $\varepsilon > 1 \Rightarrow \boxed{E>0}$

§15. Плоское движение твёрдого тела.

Плоское дв. — все точки тела движ. ∥ нек. неподвижн. плоскости.

~~Уравнение движения центра масс~~

$m\vec{a}_c = \vec{F}_{вн.}$

Уравнение вращения.

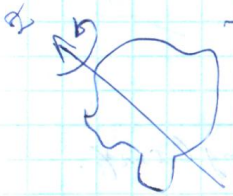
Вращение вокруг неподвижной оси.

§13: $\dot{\vec{N}} = \vec{M} \rightarrow \dot{\vec{N}}_{\parallel} = \vec{M}_{\parallel}$

§12: $\vec{N}_{\parallel} = J\vec{\omega}$

$J\cdot\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_{\parallel}$

Введём $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ — угловое ускорение вращ. тела



$J\dot{\omega}_z = M_z$

$J\varepsilon_z = M_z$, где J — момент инерции тела отн. данной оси,

$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$; $M_z = \sum_i F_{вн.iz}$

Пример. Физический маятник



Вычислим суммарный момент сил тяжести.

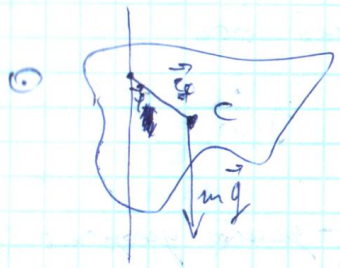
$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{g}] = [\sum_i m_i\vec{r}_i, \vec{g}]$

$\vec{R}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i$, $m = \sum_i m_i$.

$\Theta = [m\vec{r}_c, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m\vec{g}]$.

Суммарный момент силы тяж. таков, как если бы вся масса тела находилась

в его центре масс.



Выберем напр. оси z по правилу правого винта.

$\omega_z = \dot{\varphi}$

$\varepsilon_z = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$

$\vec{M} = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{g}]$ ⊗

$M_\parallel = \underbrace{r_{c\perp}}_{=l} mg\sin\varphi = mgl\sin\varphi.$

$M_z = -M_\parallel = -mgl\sin\varphi$

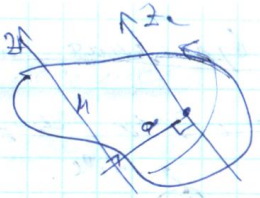
$J\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\sin\varphi = 0.}$$

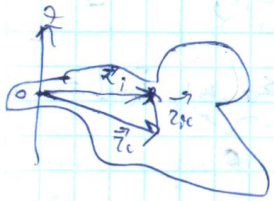
- Ур-е колебания физ. маятника.

Теорема Гюйгенса - Штейнера. Момент инерции тела (J) отн. произвольной оси = моменту инерции отн. оси, проходящей через центр масс тела ∥ данной + (полная масса тела * квадрат расст. между осями).

$J = J_c + ma^2$



$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$



$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_{ic}$;

$\vec{r}_{i\perp} = \vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}$;

$r_{i\perp}^2 = \vec{r}_{i\perp} \cdot \vec{r}_{i\perp}$

$J = \sum_i m_i(\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp})(\vec{r}_{c\perp} + \vec{r}_{ic\perp}) = mr_{c\perp}^2 +$

$+ \sum_i m_i r_{ic\perp}^2 + 2\vec{r}_{c\perp}\sum m_i \vec{r}_{ic}$

$\sum_i m_i \vec{r}_{ic} = \sum_i m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_c) = m\vec{r}_c - m\vec{r}_c = 0$

$\Rightarrow \sum m_i \vec{r}_{ic\perp} = 0.$

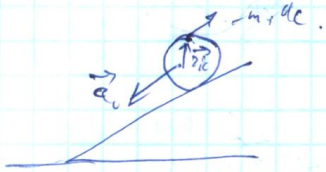
$J = J_c + ma^2$

Пример. Обруч.



$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$

Ур-е вращения тела отн. движ. оси, прох. через центр масс.



$$\vec{M}_{ин} = \sum_i [\vec{r}_{ic}, -m_i \vec{a}_c] =$$

$$= -[\underbrace{\sum r_{ic} m_i}_{0}, \vec{a}_c] = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{J\varepsilon_z = M_z}$$, сил инерции добавлять не надо.

Итог: Это ур-е вращения справедливо и жёсткой оси и для движ. оси прох. через центр масс тела

Сводка ф-л для плоского движ. тела

1) $m\vec{a}_c = \vec{F}_{вн}$

2) $J\varepsilon_z = M_z$

3) $\vec{p} = m\vec{v}_c$

4) $K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$

5) $\vec{N}_N = [\vec{r}_{c\perp}, m\vec{v}_c] + J\vec{\omega}$ $(J = J_c)$



Аналитическая механика.

§16. Системы со связями.

Степени свободы. Обобщенные координаты.

Связями в механике называют не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механич. системы.

Связи осущ. стержнями, нитями, поверхностями разл. тел. Силы, с кот. тела, осуществляющие связи, действ. на тела системы наз. силами реакции или реакциями связи. $(\vec{R})$

Математически связи выражаются ур-ями связи, т.е. соотн. между координатами, скоростями и ускорениями точек системы.

Пример: машина Атвуда.



$$\begin{cases} x_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T \\ x_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T \\ l = x_1 + x_2 + \pi R \end{cases}$$

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0;\ \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0;$

Пример: математический маятник.



$x^2+y^2+z^2=l^2$

T – сила реакции

Заданные силы – известные функции коорд. и скоростей частиц, либо известные постоянные. ($\vec{F}$)

$2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}=0$

$(r, v)=0$

$\dot{x}^2+x\ddot{x}+\dot{y}^2+y\ddot{y}+\dot{z}^2+z\ddot{z}=v^2+(\bar{a},\bar{r})=0.$

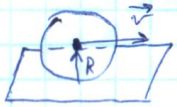
$v^2+(a_r, r)=v^2+a_r r \Rightarrow a_r=-\frac{v^2}{r}.$

Классификация связей

Голономные (сводятся к огр-ям только на коорд. тел)

Неголономные (пр-р: качение)

Пример: шар на плоскости.



$v=[\omega, R]$.

Стационарные (ур-е не сод. время в явном виде)

Нестационарные (–//– содержит)

Пример: матем. маятник, длина кот. изм-ся по зад. з-ну.

$x^2+y^2+z^2=l^2(t).$

В сис-мах с нестац. св-вами возможно не сохр. мех. энергии.

Задача механики несвоб. сис-мы – отыскание закона движения и сил реакции по заданным силам и ур-ям связи.

$M_l\ddot{r}_l=\bar{F}_l+\bar{R}_l,\quad r=\overline{1,N}$ } N – число т.т.

$F_\alpha(r_1,\dots,r_N,t)=0\quad \alpha=1,\dots,K$ } K – число связей

1) число степеней свободы сис-мы – число независимых координат, полностью определяющих положение сис-мы в пр-ве. (об-е: S)

2) обобщенными скоростями – $\forall S$ координат, полностью опред. пол-е сис-мы в пространстве: $(q_1,\dots,q_S)=\{q\}$.

3) обобщ. ск-ти – производные обобщ. коорд. по времени $(\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_S)=\{\dot{q}\}$.

Как найти число S:

Если сис-ма сост. из N точек с K ур-ий связи $\Rightarrow S=3N-K$.

$N=1,\ K=0,\quad S=3$

$N=2,\ K=0,\quad S=6$



$\Rightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2 \Rightarrow N=2, K=1, S=5.$



$N=3, K=3, S=6.$

$\forall$ тв. тело: $S=6$

Свойства обобщ. координат:

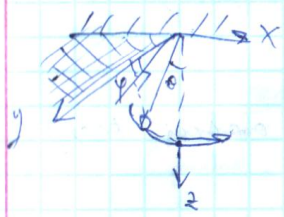
1) Радиус-векторы т. сис-мы — однозначные ф-ции обобщ. координат.

$$\bar r_i = \bar r_i(q_1, \dots, q_s, t).$$

2) обобщ. коорд. обращ. в тождество ур. связи.

$$F_\alpha(\bar r_1, \dots, \bar r_N, t)\big|_{\bar r=\bar r(N)} \equiv 0.$$

Пример: сферич. маятник.



$N=1 \quad K=1 \Rightarrow S=2.$

$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

$$\left.\begin{matrix} q_1=\theta \\ q_2=\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=l\sin\theta\cos\varphi \\ y=l\sin\theta\sin\varphi \\ z=l\cos\varphi \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2\equiv 0.$$

§17. Виртуальное перемещение. Виртуальная работа. Идеальные связи.

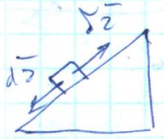
Действительное перемещение — б.м. перемещение точки, происх. под действием как заданных сил, так и сил реакции. ($d\bar r$).

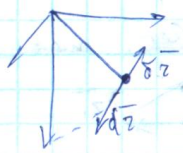
Оно обладает длительностью Δt и происх-т в соотв. с ур-ми движ. и ур. связи.

Виртуальное перемещение — вообрат. б.м. перемещение точки, допускаемое связями в данный момент времени t ($\delta\bar r$) ($t=const$).

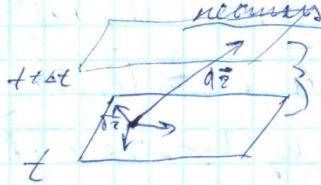
Оно не обладает длительностью и не зависит от заданных сил.

Пример: стационарн. связь.





нестац. связь.



$dr = u\,dt$

Матем-е опр-е:

$$\bar r_i = \bar r_i(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \; , \; i = \overline{1, N}.$$

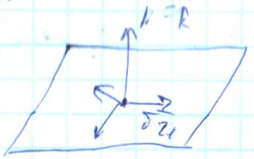
δ - действует как обычный дифференциал по всем координатам, но не по времени.

Вирт. работа - работа силы на вирт. перемещении. $\delta A = (\bar{F}, \delta \bar{r})$.

Идеальная связь - связь, для которой δA всех реальных работ нуль.

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} (\bar{R}_i, \delta \bar{r}_i) = 0.$$

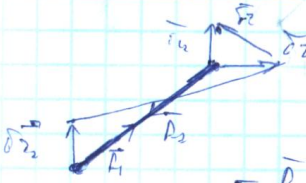
Пример: абс. твердое тело:



$$(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0$$

Это верно для всех видов и формы, если связь неспад. Главное - жесткость.

Невес. нерастяжимый стержень:



$$\bar{R}_1 = -\bar{R}_2$$

$$\delta A_R = (\bar{R}_1, \delta \bar{r}_1) + (\bar{R}_2, \delta \bar{r}_2) =$$

$$= \bar{R}_1 \delta \bar{r}_1 + (-\bar{R}_2) \delta \bar{r}_2 = (\bar{R}_1, \delta \bar{r}_1 - \delta \bar{r}_2) =$$

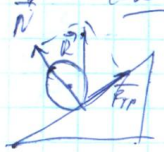
$$= (\bar{R}_1, \delta(\bar{r}_1 - \bar{r}_2)) = (\bar{R}_1, \delta \bar{r}) \Rightarrow \text{из } R_1 = 2T \Rightarrow \delta A_2 =$$

$$= (2\bar{T}, \delta \bar{r}) = 2(\bar{T} \delta x + T_y \delta y + T_z \delta z) = \frac{2}{2}(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)$$

$$= \frac{2}{2} \delta(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{2}{2} \delta(r^2) = \frac{2}{2} \delta(C^2) = 0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ связь идеальна.

Качение без проскальз.



$$(\bar{R}, \delta \bar{r}) = 0, \text{ т.к. } \delta \bar{r} = 0.$$

§12. Ур-е Лагранжа.

Обобщенные силы. Система с идеальными голономными связями.

$$m_i \ddot{\bar{r}}_i = \bar{F}_i + \bar{R}_i, \; i = \overline{1, N}$$

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} (\bar{R}_i, \delta \bar{r}_i) = 0.$$

$$\delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Получим ур-е, в кот. не входят силы реакции:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\ddot{\bar{r}}_i, \delta \bar{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) \; - \text{ур-е Лагранжа.}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \delta \bar{r}_i) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^{s} \delta q_j \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\bar{r}}_i - \bar{F}_i, \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}) = 0.$$

Обозначим $\sum_{e=1}^{N} \left(F_e, \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}\right) = Q_j$ (обобщ. сила)

$$\sum_{e=1}^{N} \left(m_e \ddot{\vec{r}}_e, \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}\right) = X_j$$

$$\sum_{j=1}^{s} \delta q_j \left(X_j - Q_j\right) = 0$$

т.к. обобщ. коорд. независимы $\Rightarrow \forall j \quad X_j - Q_j = 0, \; j = \overline{1,s}$.

$$X_j = \omega_j \qquad j = 1, \dots, s$$

$$\begin{cases} X_j = \sum_{e=1}^{N} m_e \ddot{\vec{r}}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \\ Q_j = \sum_{e=1}^{N} F_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \end{cases}$$

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e v_e^2 = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_e}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_e(q, \dot{q}, t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e = K(q, \dot{q}, t).$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_j}\right) = \sum_{e=1}^{N} m_e \dot{\vec{v}}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} + \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} = X_j$$

$$+ \frac{\partial K}{\partial q_j} \Rightarrow X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}, \; j = \overline{1,s}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e v_e^2 = K(q, \dot{q}, t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

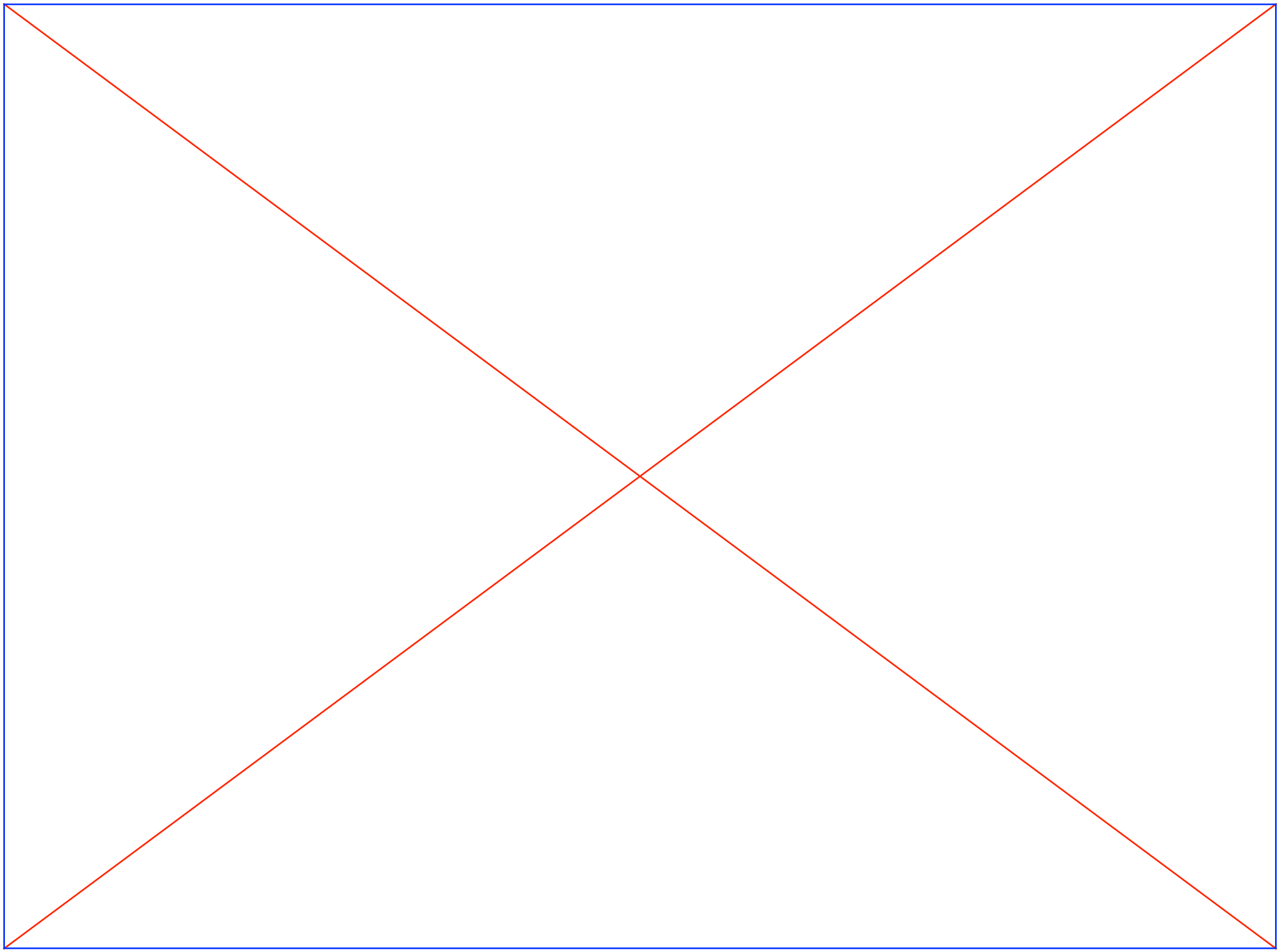
ур-я Лагранжа отн. кинетической энергии системы.

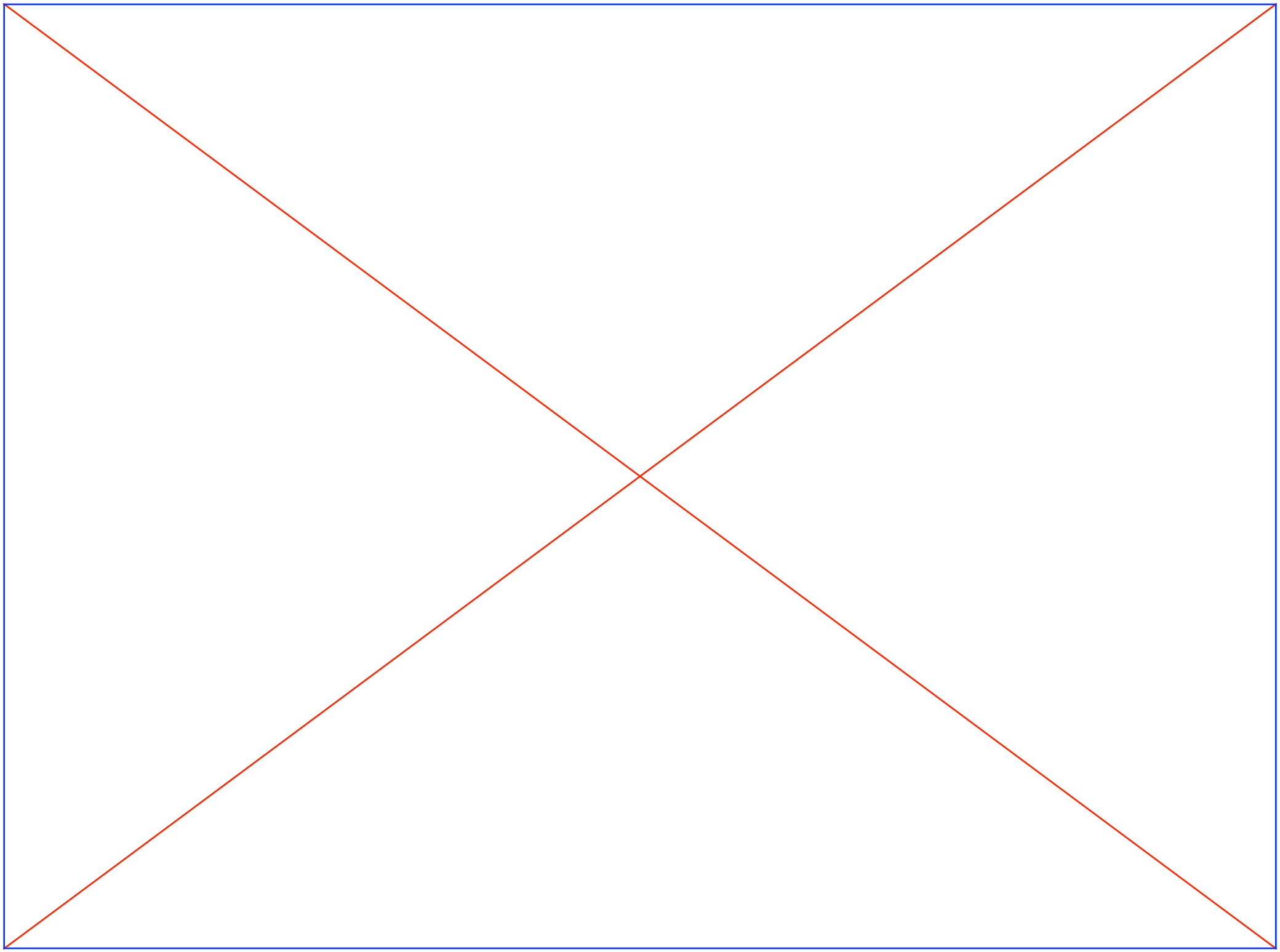
Обобщенная сила.

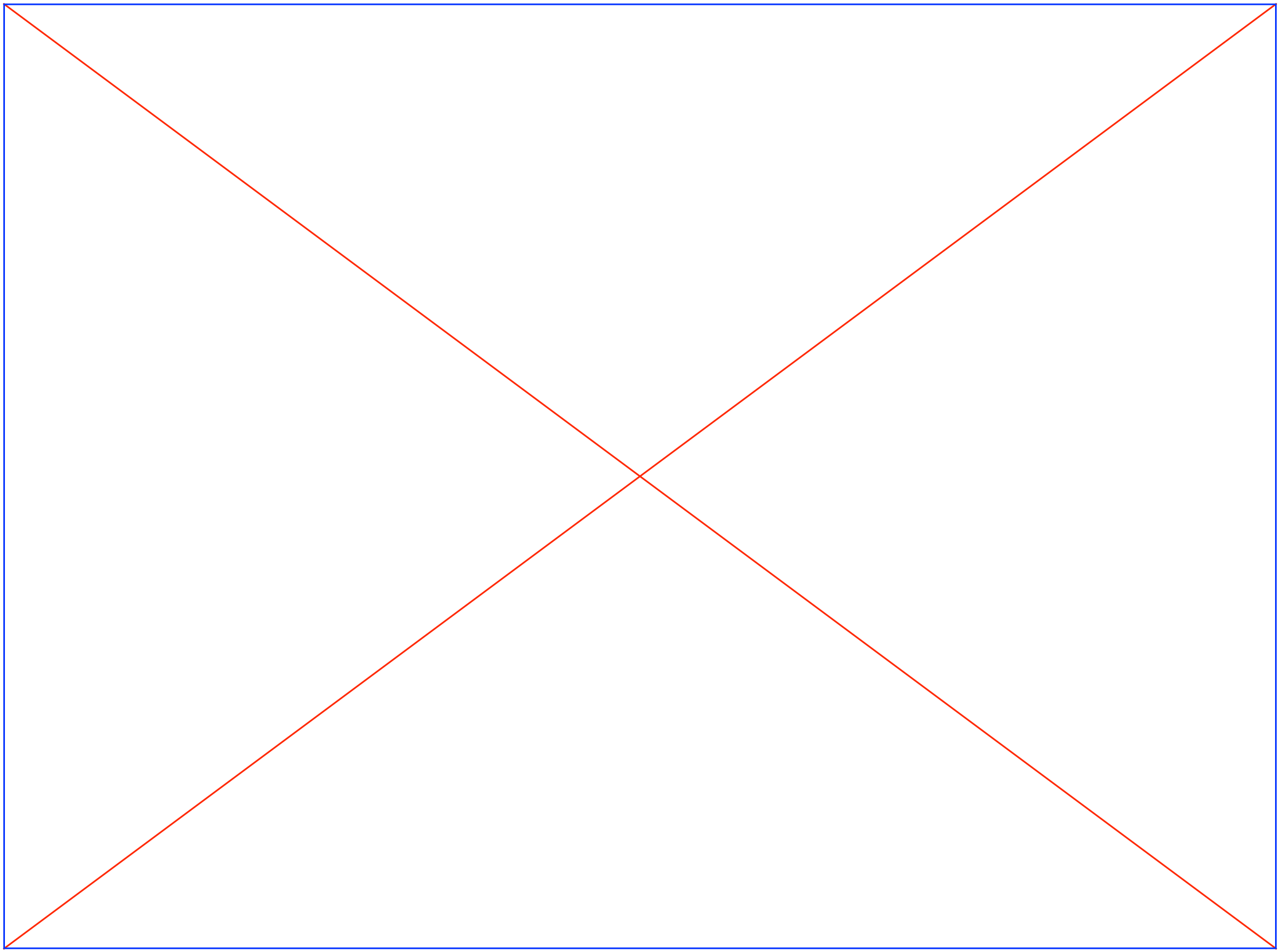
Величина, опр. формулой $\boxed{Q_j = \sum_{e=1}^{N} \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}}$, $j =$

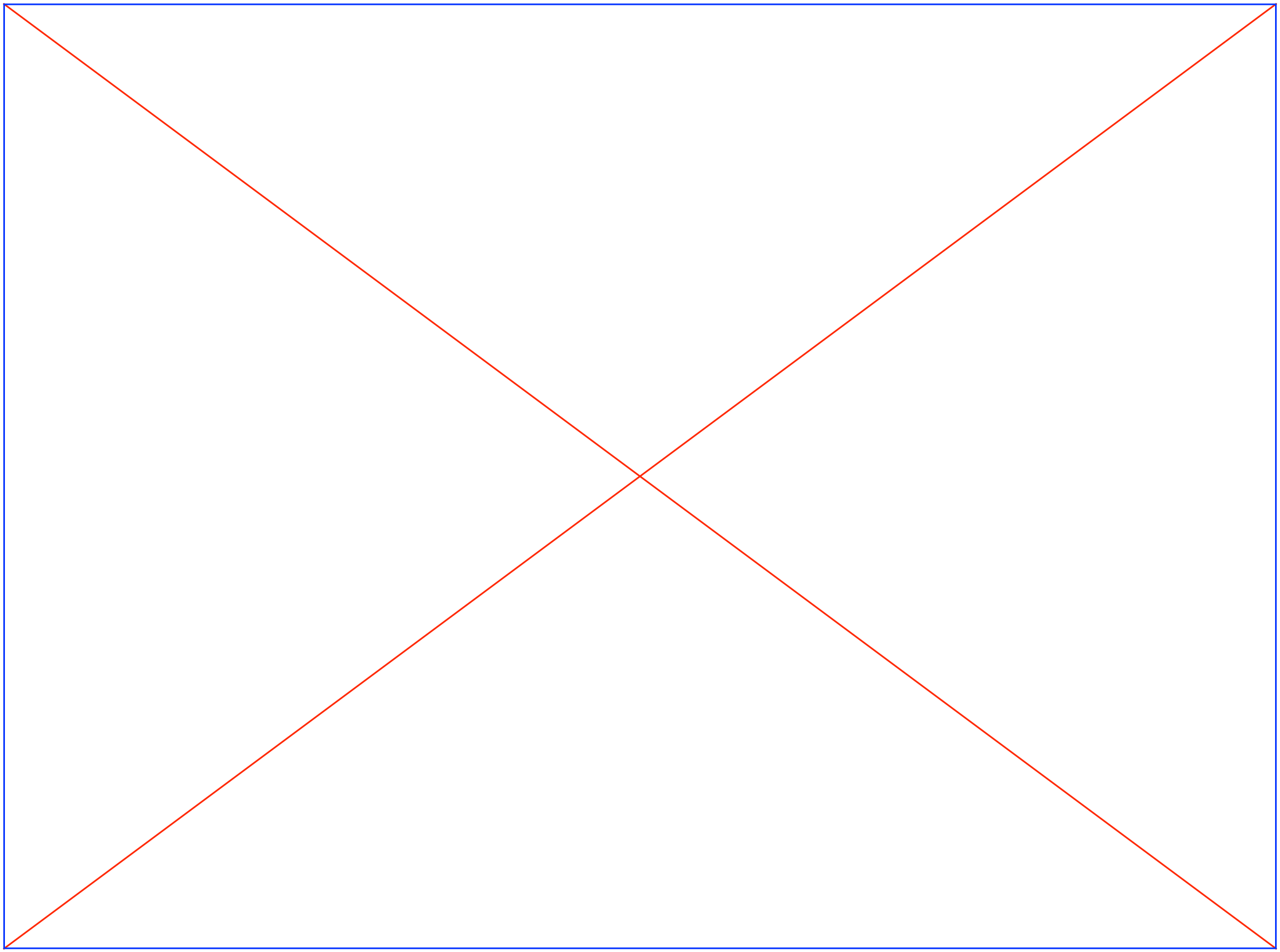
если консерв. $Q_j = \frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$

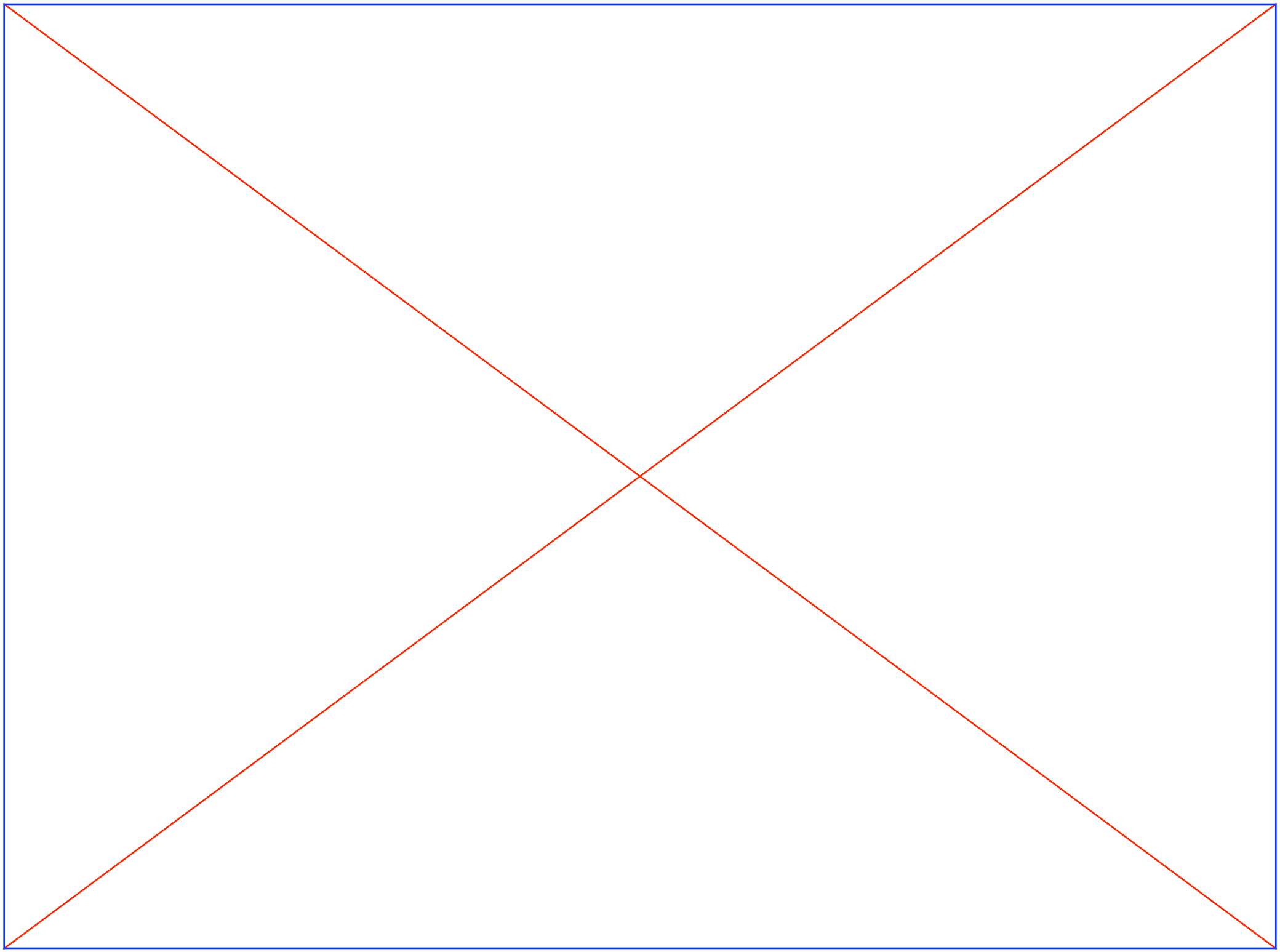
Размерность $[Q] = \frac{Дж}{[q]}$.











Символ Кронекера: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha=\beta \\ 0, & \alpha\neq\beta \end{cases}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum k_{\alpha\beta}(\dot q_\beta \delta_{\alpha j} + \dot q_\alpha \delta_{\beta j}) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta \cdot$$

$$\cdot \sum_{\alpha=1}^{s} k_{\alpha\beta}\delta_{\alpha j} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha \sum_{\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta}\delta_{\beta j} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta K_{j\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha K_{\alpha j} \overset{K_{\alpha j}=K_{j\alpha}}{=\!=} \boxed{\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha K_{j\alpha} = p_j}$$

$j=\overline{1,s}$

Обобщ. импульс есть кин. комбин. обобщ. скоростей системы.

$\Rightarrow q_j \to p$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j = \sum_{j=1}^{s}\dot q_j \sum_{\alpha=1}^{s} k_{j\alpha}\cdot\dot q_\alpha = \sum_{\alpha,j=1}^{s}\sum K_{j\alpha}\dot q_j \dot q_\alpha$$

$= 2K.$

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j\dot p_j - L = 2K - K + \Pi = K + \Pi = E$$

Гамильтон. консервт. сис-мы — это полная механич. энергия сис-мы, выраженная через обобщ. координаты и обобщ. импульсы

$$\boxed{H = K + \Pi = H(q,p)}$$

Пример. Частица в потенциальном силовом поле.



$\Pi = \Pi(x,y,z)$.

$s=3$.

$H = K + \Pi = H(q,p)$

$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$.

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial K}{\partial \dot x} = m\dot x;\ p_y = m\dot y;\ p_z = m\dot z.$$

$$\dot x = \frac{p_x}{m};\quad \dot y = \frac{p_y}{m};\quad \dot z = \frac{p_z}{m}$$

$$K = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x,y,z)}$$

§21. Равновесие сис-мы и ее устойчивость.

Равновесие — такое сост. системы, в котором сис-ма, представленная самой

сей, может неподвижное число другое дело.



Условие равновесия

$$m_\ell \ddot{\vec{r}}_\ell = \vec{F}_\ell + \vec{R}_\ell, \quad \ell = 1, \dots, N$$

В равновесии $\ddot{\vec{r}}_\ell = 0$.

(I) $\vec{F}_\ell + \vec{R}_\ell = 0, \quad \ell = 1, \dots, N.$

Сумма задания сил и сил реакции действ. На точку $= 0$ в точках сис-мы.

Рассм. движение сис-мы с идеальными голономными стационарными связями.

$\sum_{\ell=1}^{N} \vec{R}_\ell \delta\vec{r}_\ell = 0$ – идеальная связь.

(1) $\cdot \delta r_\ell$ и сумма по всем точкам: $\sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \delta\vec{r}_\ell = 0$ (2)

Перейдем к набору обобщенных координат

$\vec{r}_\ell = \vec{r}_\ell(q_1, \dots, q_s), \ell = \overline{1,N}.$

$$\delta\vec{r}_\ell = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \delta\vec{r}_\ell = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q_j}}_{Q_j} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0.$$

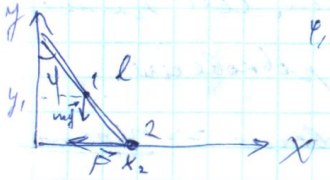
Из неавис. обобщ. координат следует,

$\Rightarrow Q_j = 0 \ \forall j = \overline{1,s}$

(3) $\boxed{Q_j = 0}, \ j = \overline{1,s}$

Итак, в сост. равновесия все обобщ. силы должны быть равны 0.

Пример



$\varphi, m, g, F - ?$

$s = 1, \ q = \varphi.$

$$Q = \sum_{\ell=1}^{N} \vec{F}_\ell \frac{\partial \vec{r}_\ell}{\partial q} = m\vec{g} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \varphi} + \vec{F} \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial \varphi} =$$

$$- mg \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - F \frac{\partial x_2}{\partial \varphi}$$

$y_1 = \frac{l}{2}\cos\varphi, \ x_2 = l\sin\varphi.$

$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2}\sin\varphi; \ \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = l\cos\varphi.$

$$Q = \frac{mgl}{2}\sin\varphi - Fl\cos\varphi = 0.$$

$$\boxed{F = \frac{mg}{2} \operatorname{tg}\varphi}$$

Пусть все задан. силы потенциальные, тогда $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, $Q_j = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0, \ j = \overline{1,s}$ (4)

В сост. равновесия потенц. энергия сис-мы

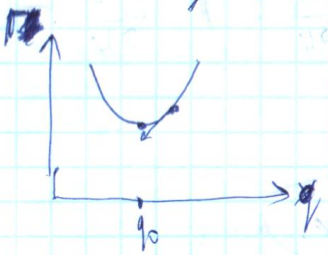
должна иметь экстремум по всем обобщ. координатам.

Устойчивость равновесия.

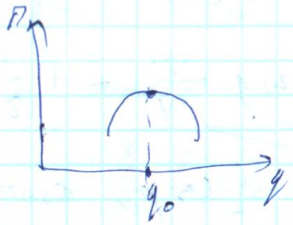
Равновесие наз. устойчивым, если система, выведенная из этого сост. и предост. себе начинает двигаться в сторону тел. равновесия.

Если удаляться от равновесия => неустойчивое

Если не двиг => безразличное сост. сис-мы.



устойчивое



неустойчивое.

Пример.

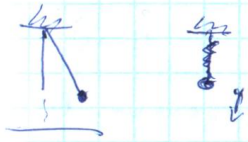


неустойчивое.

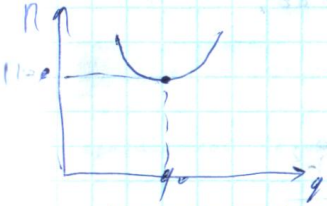
§22. Колебания

в системах с одной степенью свободы.

Колебанием наз. повторяющееся движение в окрестности положения устойчивого равновесия системы



В сист-ме есть идеальные голономные стац. связи или вообще их нет (связей).



$S=1$. q

обозначим $x = q - q_0$.

$\dot{x} = \dot{q}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

$L = K - П.$

$$П = П(x) = П(x=0) + \left.\frac{\partial П}{\partial x}\right|_{x=0} x + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 П}{\partial x^2}\right|_{x=0} x^2$$

$П(x=0) = 0$ – выбираем нач. отсчёта.

$\left.\frac{\partial П}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ – в силу равновесия (усл. (5)).

Малые колебания $x \to 0$. $\Rightarrow П = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 П}{\partial x^2}\right|_{x=0} x^2 = \frac{1}{2} П_1$

где $П_1 = \left.\frac{\partial^2 П}{\partial x^2}\right|_{x=0} = const > 0.$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e v_e^2 = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \vec{v}_e, \quad v_e = \dot{\vec{r}}_e, \quad \vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s)$$

$$\vec{v}_e = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta \cdot \underbrace{\sum_{e=1}^{N} m_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta}}_{k_{\alpha\beta}(q)}$$

Колебания малые $x \to 0$, $q \to q_0$.

$k_{\beta\alpha}(q_0) = k_{\alpha\beta}(x=0) = const$.

$K = \frac{1}{2}k_1\dot{x}^2$, $k_1 = const > 0$.

$$L = K - \Pi = \frac{1}{2}k_1\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\Pi_1 x^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = k_1\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\Pi_1 x.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

$$k_1\ddot{x} + \Pi_1 x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\Pi_1}{k_1}x = 0. \qquad \frac{\Pi_1}{k_1} > 0.$$

Обозначим $\frac{\Pi_1}{k_1}$ через ω^2 $[\omega] = c^{-1}$,

$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0.}$ – ур-е гармонич. колебаний,

где x – обобщ. координата, кот. отсчитывается от полож. равновесия системы, ω – частота колебаний.

Общее решение:

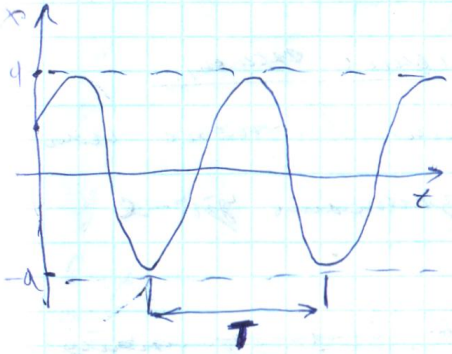
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, x – координата, где t – время, ω – частота, φ – нач. фаза, A – амплитуда.

Проверим. $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$ 23.11.

Гармоническими наз. колебания происходящие по з-ну cos или sin.



T – период колебания. $T = \frac{2\pi}{\omega}$

A – амплитуда.

φ – начальная фаза $\omega t + \varphi$ – фаза.

Амплитуда и нач. фаза зависят от нач. усл.

Начальные условия:

$$\begin{cases} x(t_0=0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (!) \quad A, \varphi - ?$$

$$\begin{cases} A\cos\varphi = x_0; \\ -A\omega\sin\varphi = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$A^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega^2;$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega^2} \\ \cos\varphi = x_0/A, \quad \sin\varphi = -\dfrac{\dot{x}_0}{A\omega}. \end{cases}$$

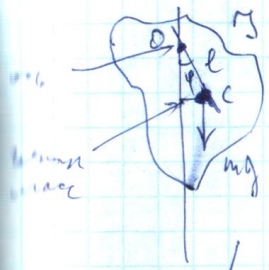
Частота колебаний ω не зависит от нач. усл., а определяется устройством системы.

Метод определения частот.

1) Пользуясь ур-ями Ньютона или ур-ями Лагранжа записать ур-е движения системы.

2) Привести его к стандартному виду $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (исп. усл. малости колебания).

Пример. физический маятник.



$s = 1, \quad q = \varphi. \quad \dot{q} = \dot{\varphi}$

$$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$\Pi = -mgl\cos\varphi.$$

$$L = K - \Pi = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$J\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0.$$

малые колебания $\varphi \ll 1$.

$\sin\varphi = \varphi;$

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgl}{J}\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}},$$

m — масса маятника

g — уск. своб. падения

l — расст. от оси вращ. до центра масс

J = момент инерции отн. оси вращения.

Пример Математич. маятник.



$J = ml^2. \quad \omega = \sqrt{\dfrac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\dfrac{g}{l}};$

$T = 2\pi\sqrt{l/g}$ — ф-ла Гюгенса

$l = 1$ м $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{10}}$ с ≈ 2 с

Пример. обруч



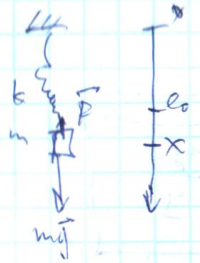
$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$

$l = R$

$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$.

$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}$.

Пружинный осцилятор.



l_0 — длина своб. пружины.

$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$,

$m\ddot{x} + k(x - l_0) - mg = 0$.

$m\ddot{x} + k\underbrace{\left(x - l_0 - \frac{mg}{k}\right)}_{y} = 0$;

$\ddot{x} = \ddot{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow m\ddot{y} + ky = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

§23. Физические эффекты в колебательных системах

(1). Гармонические колебания

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

$12^{40} = 11^{10}$

$13^{30} = 14^{20}$

Учебники: Никитин, Чесноков и „Механика"

Нормальные колебания — гармонические колебания

[illegible] из собств. частот сис-мы.

(1) $\omega_1 \quad Q_2 = 0 \quad Q_2(0) = \dot{Q}_2(0) = 0$;

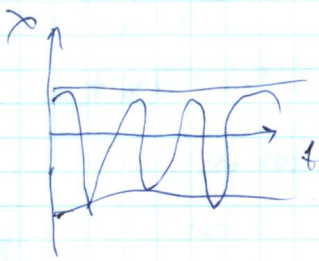
$\Rightarrow x_1(0) = x_2(0), \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0)$;

$\Rightarrow$

(2) $\omega_2 \quad Q_1 = 0 \Rightarrow Q_1(0) = \dot{Q}_1(0) = 0$;

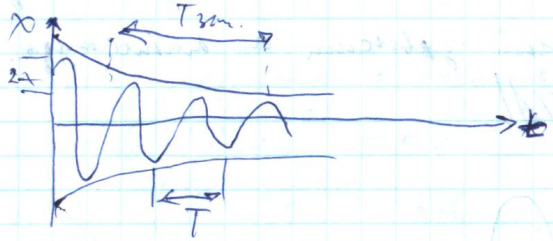
$x_1(0) = -x_2(0) \quad \dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0)$.

$\Rightarrow$



② Затухающие колебания

$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$



T – период колебания

$T_{зат}$ – время затухания (10_2 раз).

Добротность колебания $Q = T_{зат} / T.$

③ Нелинейные колебания.

$\ddot{x} + F(x) = 0.$

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin\varphi = 0.$



$\varphi(T) - ?$ З-н сохр. энергии:

$K + \Pi = E = const.$

$K = \frac{m v^2}{2} = \frac{m \ell^2 \dot{\varphi}^2}{2}$, $\Pi = -mg\ell \cos\varphi.$

$$\frac{ml^2\dot\varphi^2}{2} - mgl\cos\varphi = E$$

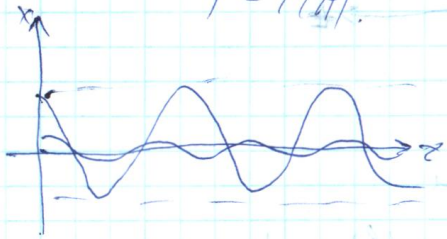
$$\dot\varphi = \pm\sqrt{\frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{a+b\cos\varphi}} = \pm\int_0^t dt = \pm t.$$

Эллиптический интеграл.

У нелинейного осциллятора период колебаний зависит от амплитуды.

$T = T(A)$.



④ Параметрические колебания.

$\ddot x + \omega^2(t)x = 0$, где $\omega(t)$ – заданная ф-ция от времени.



$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$l = l(t) \Rightarrow \omega = \omega(t)$.

Параметрический резонанс – раскачка колебаний засчет работы непотенц. сил.



⑤ Вынужденные колебания (происх. под действием периодически изменяющейся внешней силы.

$$\ddot x + \alpha\dot x + \omega_0^2 x = F(t)$$

$$F(t) = F_0\cos\omega t$$

ω_0 – собств. частота колебаний сис-мы

ω – частота внешней системы.

Частное решение. Ф-ла Эйлера: $\cos\omega t = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + к.с.$

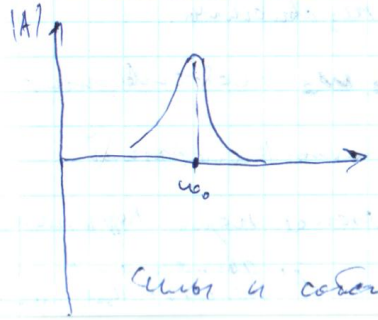
Ищем решение в виде: $x(t) = \frac{1}{2}Ae^{i\omega t} + к.с.$

$$\begin{cases}\dot x = \frac{1}{2}Ai\omega e^{i\omega t} + к.с.\\ \ddot x = -\frac{1}{2}A\omega^2 e^{i\omega t} + к.с.\end{cases}$$

$$A(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\alpha\omega)A = F_0.$$

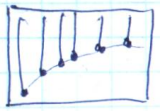
$A = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\alpha\omega}$. Это решение соотв. режиму установившихся колебаний. Это решение устанавливается на дост. больших временах.

Зависимость амплитуды от частоты:



– Резонанс (возрастание амплитуду колебаний при совпадении частот внешней силы и собственных колебаний системы).

6. Ансамбль осцилляторов.



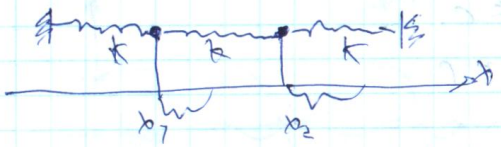
$\Delta\omega = const$

x_i – отклонение маятника с номером i,

$x = \sum_i x_i$



7. Связанные колебания.



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1); \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2; \end{cases}$$

Эти ур-я связаны, однако можно перейти к таким лин. комб. сис-м координат, для которых они станут незав.

(+) $m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$ (−) $m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1)$

Нормальные координаты системы:

$Q_1 = x_1 + x_2$, $Q_2 = x_2 - x_1$ – это координаты, для которых ур-я движения независимы.

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0; & \omega_1 = \sqrt{k/m}; \\ \ddot{Q}_2 + \omega_2 Q_2 = 0; & \omega_2 = \sqrt{3k/m}; \end{cases}$$

ω_1, ω_2 – собственные частоты колебаний

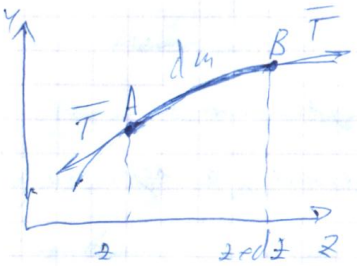
(частоты на которых меняются норм. координаты)

Норм. координаты – координаты, кот. в движениях сис-мы меняются независимо.

$x_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$; $x_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$; Возможен режим колебаний, когда отличны от 0 только одно из нормальных координат.

30.11.07

Волна – колебание распространяющееся в сплошной среде.



$dm = \rho\, dz$

$\rho = \frac{m}{l}\left[\frac{кг}{м}\right]$ – линейная плотность

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dm = T\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_B}_{\text{tg угла в B}} - \underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A}_{\text{tg угла в A}}\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz\right) T = \rho\, dz\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2};$$ обозначим $\frac{T}{\rho} = v^2 \left[\frac{м^2}{с^2}\right]$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$ – волновое уравнение

Общее решение.

$u(z,t) = F_1(t - z/v) + F_2(t + z/v)$, F_1 и F_2 – произвольные дифференцируемые ф-ции.

v – скорость волны.

$v = \sqrt{T/\rho}$.

Статистическая механика

механика сис-м, состоящих из большого числа частиц.

Отказ от цели поиска закона движения.

Новая цель: искать не з-н движения, а вероятностное состояние системы.

$q(t), p(t)$

закон движение $\Rightarrow$ $w(q,p)$

вероятность состояния

§29. Случайные величины и вероятности.

Случайное событие — событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого может многократно повторяться.

Вероятность случайного события — отношение числа появления события в серии испытаний к полному числу испытаний в пределе, где число испытаний $\to \infty$.

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}.$$

$0 \le P \le 1$.

1 — достоверное событие

0 — невозможное событие

Аксиома Слож. вер.: вероятн. наступления одного из взаимоисключ. событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A \underset{\cup}{+} B) = P(A) + P(B).$$

Аксиома умнож. вер.: вероятн. совм. незав. случайных событий равна произв. их вероятностей

$$P(A \underset{\cap}{B}) = P(A)\,P(B).$$

Случайная величина — величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но которая может многократно повторяться.

Плотность вер. — отношение вероятности попадания сл. вел. в малый интервал вблизи заданного значения x величине интервала в пределе, когда интервал $\to 0$.

$$w(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

Св-ва:

1) $w(x) \geq 0$; 2) $\int w(x)\,dx = \frac{1}{[x]}$;

3) условие нормировки.

$$\int w(x)\,dx = 1.$$

Правило вычисления средних:

$f(x)$; $\overline{F(x)} = \int f(x)\,w(x)\,dx$

Среднее значение

$\bar{x} = \int x\,w(x)\,dx$ — мат. ожидание

Дисперсия — средний квадрат отклонения от среднего.

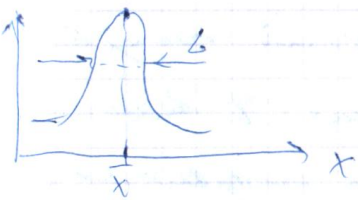
$$\sigma_x^2 = |x - \bar{x}|^2;$$

$$\sigma_x^2 = \int (x-\bar{x})^2\,dx = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

Распределение Гаусса.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\bar{x})^2/2\sigma^2},$$

$-\infty < x < +\infty$



Интегралы для справок.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} \quad \text{(инт-л Пуассона)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2}\,dx = \sqrt{\pi/a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot\frac{1}{2a}$$

Многомерное распределение плотности вероятности

Это предел отношения вероятности попадания нескольких сл. величин в малые окрестности общих заданных значений к произведению величин интервалов, когда интервалы $\to 0$.

$$w(x,y) = \lim_{\Delta x,\Delta y\to 0} \frac{P(x \leq x < x+\Delta x,\ y \leq y < y+\Delta y)}{\Delta x\cdot\Delta y}.$$

$w \geq 0$, $\int w\,dx = \frac{1}{[x][y]}$;

условие нормировки: $\iint w(x,y)\,dx\,dy = 1$.

$f(x,y) \Rightarrow \overline{F(x,y)} = \iint F(x,y)\,w(x,y)\,dx\,dy$.

Ф-ла полного перехода.

$$w_1(x) = \int w(x,y)\,dy$$

$$w_2(y) = \int w(x,y)\,dx$$

Для незав. сл. величин будем иметь

$w(x,y) = w_1(x)\cdot w_2(y)$.

§25. Распределение Гиббса

Осн. закон статистической механики равновесных сис-м

В состоянии термодинамического равновесия распр. плотности вероятности для разл. сост. сис-мы описывается ф-лой Гиббса.

$w(z) = Ce^{-H(z)/kT}$, где w — многомерная плотность вер.; z — набор обобщ. коорд. и обобщ. импульсов.

$z = q_1, \dots, q_s$; $p = p_1, \dots, p_s$;

$z = \{q, p\}$.

H — гамильтониан $= K + \Pi$,

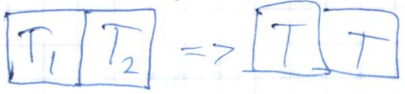
K — постоянная Больцмена $K = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{°K}$,

T — абс. температура.

$T = t + 273°$,

C — нормировочная постоянная.

Термодинамическое равновесие — сост. в к-рой сис-ма предост. самой себе может нах. сколь угодно долго.



неравновесное равновесное

Температура* — это то, что измеряется термометром.

Термометр.



Градус — 1/100 часть интервала между точкой (t) плавления льда и $t°$ кипения воды.

Следствие распр. Гиббса:

1) распр. молекул по скоростям.

$w(v_x, v_y, v_z) = Ce^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}$

— распр. Максвелла.

Температура есть мера средней кинетической энергии молекул

2) распр. частиц во внешнем силовом поле

$w(x,y,z) = Ce^{-\Pi(x,y,z)/kT}$

— распр. Больцмена.

x, y, z — коорд. точки.

$\Pi(x,y,z)$ — потенц. энергия.

Пример: поле силы тяжести.

$\Pi = \Pi(z) = mgz$.

$w(z) = Ce^{-mgz/kT}$

Измерение постоянной Больцмана. Опыт Перре.



мкн $= 10^{-6}$ м.

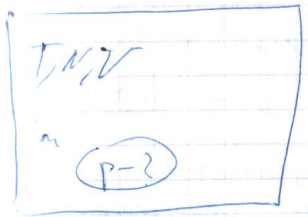
$m = \rho V$, $V = \frac{4}{3}\pi(0{,}2\ \text{мкн})^3$

$V = 4\cdot 8\cdot 10^{-21}\ \text{м}^3 = 3\cdot 10^{-20}\ \text{м}^3 = 3\cdot 10^{-14}\ \text{см}^3$

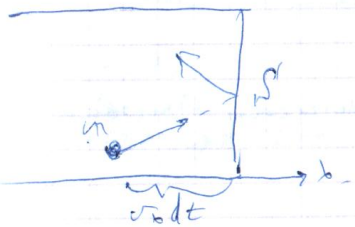
$m = \rho V$, $\rho = 0{,}25\ \text{г/см}^3$;

$m = 0{,}25\ \text{г/см}^3 \cdot 3\cdot 10^{-14}\ \text{см}^3 = 0{,}6\cdot 10^{-14}$ г.

Ур-е сост. идеального газа.



$n = \frac{N}{V}$ — концентрация молекул.



$2mv_x$

dt

$Sv_x dt \cdot n(v_x)$

$n(v_x) = n\,w(v_x)\,dv_x$

$p = \frac{2mv_x \cancel{S} v_x \cancel{dt}\, n\, w(v_x)\,dv_x}{\cancel{S}\cancel{dt}} = dp$;

$dp = 2mn v_x^2 w(v_x)\,dv_x$.

$p = \int dp = 2mn\int_0^\infty v_x^2 w(v_x)\,dv_x$.

$w(v_x) = Ce^{-mv_x^2/2kT}$.

$p = mn\int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 w(v_x)\,dv_x = mn\overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m}$;

$\boxed{p = nkT}$ — ур-е сост. идеальн. газа.

Пример: концентрация молекул в воздухе.

$n = \frac{p}{kT}$; $\begin{cases} p = p_0 = 10^5\ \text{Па} \\ T = T_0 = 273\ \text{К} \end{cases}$

$n = n_0 = \frac{10^5\ \text{Па}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 273\ \text{Дж}} = 2{,}7\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}$ — число. Ла-Шмидта

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 N}{V} = m_0 n$; $m_0 = \frac{\rho}{n}$; $m_0 = \frac{1{,}3\ \text{кг/м}^3}{2{,}7\cdot 10^{25}\ \text{м}^{-3}} =$

$= 0{,}5\cdot 10^{-25}$ кг.

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{d^3} = \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$; $d = \sqrt[3]{m_0/\rho} = \sqrt[3]{\frac{0{,}5\cdot 10^{-25}\ \text{кг}}{10^3\ \text{кг/м}^3}} =$

$= 3\cdot 10^{-10}$ м (молекула воздуха)

§26. Распределение энергии по степеням свободы

Теорема о равнораспределении энергии степеням свободы. В состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия $\bar{E} = kT/2$.

k: $1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \frac{Дж}{К}$ — постоянная Больцмана,

T — абсолютная температура.

$T = t + 273$

Квадратичной степенью свободы (кв. переменной) называется переменная, у которой в выражении функции Гамильтона (энергии) эта переменная входит в квадрат.

$H = K + \Pi = a z_1^2 + H'(z')$, где z_1 — квадратичная переменная, а H' — сумма остальных переменных.

$a = a(z') > 0$

Пример. Частица в потенциальном силовом поле.

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \Pi(x, y, z).$$

Вычислим среднюю энергию, приходящуюся на квадратичную степень свободы.

$$E = \langle a z_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a z_1^2\, w(z)\, dz, \quad \text{где } w(z) = Ce^{-H/kT} \text{ (распр. Гиббса)}$$

— среднее значение.

$$H(z) = a z_1^2 + H'(z);$$

$$E = C \int dz' e^{-H'(z')/kT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dz_1\, a z_1^2 e^{-a z_1^2/kT} \quad \text{(I)}$$

Вычислим инт-л $\int$ по частям.

$$a z_1^2 e^{-a z_1^2/kT} = -\frac{kT}{2} z \frac{d}{dz_1} e^{-a z_1^2/kT}$$

$$-\frac{kT}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz_1\, z_1 \frac{a}{kT} e^{-a z_1^2/kT} = -\frac{kT}{2}\left(z_1 e^{-a z_1^2/kT}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z_1^2/kT} dz_1 \right) = \frac{kT}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z_1^2/kT} dz_1 = I.$$

$$E = C \int dz' e^{-H'(z')/kT} \int \frac{kT}{2} e^{-a z_1^2/kT} dz_1 =$$

$$= \frac{kT}{2} \int dz\, C e^{-H'(z')/kT - a z_1^2/kT}.$$

$$\boxed{E = \frac{kT}{2}}$$

(на 1 ст. по степеням свободы.

$\int_{-\infty}^{\infty} w(z)\, dz = 1$

в силу условий нормировки.

Пример. Внутренняя энергия идеального газа.

$U = \langle H \rangle = \langle K \rangle + \langle \Pi \rangle$.

Идеальный газ: $\Pi = 0$.

$\langle K \rangle = N \cdot \langle K_0 \rangle$, где K_0 – кинетическая энергия одной молекулы газа.

В кинетич. энергии все переменные явл-ся квадратичными.

$\langle K_0 \rangle = \frac{kT}{2} S$, где S – число степеней свободы.

$S = 3$ (He, Ne, Ar)

$U = \frac{NkT}{2} \cdot S = \frac{3}{2} NkT$

$S = 5$ (H_2, O_2, N_2) $U = \frac{5}{2} NkT$

$S = 6$ (H_2O, CO_2, NH_3, CH_4)

$U = 3NkT$

Теплоемкость идеального газа при постоянном объёме.

$C_V = \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} N k S$.

1 моль газа, $N = N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$/моль (число Авг

$C_V = \frac{1}{2} N_A k S$.

$R = N_A k = 8{,}33 \frac{Дж}{моль \cdot K}$ – универсальная газовая постоянная.

$C_V = \frac{1}{2} R S$.

$\boxed{\frac{C_V}{R} = \frac{1}{2} S}$.

He: $S = 3$; $\frac{C_V}{R} = \frac{3}{2}$.

O_2: $S = 5$; $\frac{C_V}{R} = \frac{5}{2}$;

H_2O: $S = 6$; $\frac{C_V}{R} = 3$;

§27. Диффузия и теплопроводность.

Диффузией наз-ся процесс проникновения одного вещ-ва в другое.

Закон диффузии: поток частиц пропорционален градиенту их концентрации

$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$, n – концентрация, D – коэф-т диффузии

поток частиц.

Коэф-т диффузии. – коэф-т пропорциональности между потоком частиц и градиентом их концентрации

Поток частиц.



$$\Rightarrow j_x = \frac{\Delta N_x}{S \cdot \Delta t};$$

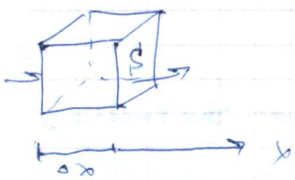
N_x – число частиц, пролетевших в пол оси x, через площадку площади S за время Δt,

$$[j_x] = \frac{1}{м^2 \cdot с}, \quad n = \frac{N}{V} \left[м^{-3} \right].$$

$$[D] = \left[\frac{j_x}{\frac{\partial n}{\partial x}} \right] = \frac{1}{м^2 с} \cdot м^4 = \frac{м^2}{с}.$$

Физ. смысл D – чем расплывается диффузионное пятно.

Уравнение сохранения числа частиц



$$j_x = \frac{\Delta N_x}{S \Delta t} \Rightarrow \Delta N_x = j_x S \Delta t.$$

Частицы вылетели: $\Delta N_x / N = j_x(x) S \Delta t$.

Частицы вошедшие $\Delta N_x(x+\Delta x) = j_x(x+\Delta x) S \Delta t$

Приращение числа частиц:

$$\Delta N = \Delta N_x(x) - \Delta N_x(x+\Delta x) = S \Delta t \left(j_x(x) - j_x(x+\Delta x) \right)$$

$$= S \Delta t \left(j_x(x) - j_x(x) - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \right)$$

по Тейлору

$$\Delta N = - S \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x.$$

Объем кубика $\Delta V = S \Delta x$.

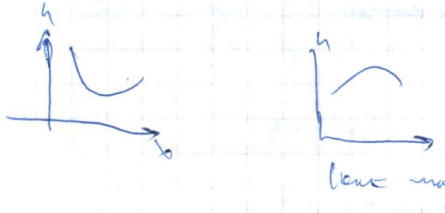
Приращение концентрации:

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{\Delta x} = - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta t.$$

$$\Delta t \to 0$$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = - \frac{\partial j_x}{\partial x}} \leftarrow j_x = - D \frac{\partial n}{\partial x};$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \text{ур-е диффузии}$$

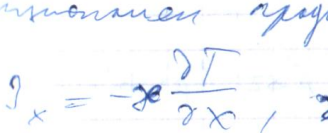


Теплопроводность – процесс распространения тепла χ^2 неравномерно нагретых тел.

Закон теплопроводности. Поток тепла пропорционален градиенту температуры.

$$j_x = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \varkappa \text{ – коэф-т теплопроводности.}$$

Поток тепла



ΔQ

T

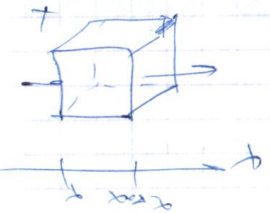
$j_x = \frac{\Delta Q_x}{S \Delta t}$, ΔQ_x – энергия, которая прошла в ед. вр. через единицу пл-ди S за время Δt.

$[Q] = Дж. \Rightarrow [j_x] = \frac{Дж}{м^2 с}$.

$[\varkappa] = \left[\frac{j \cdot x}{T}\right] = \frac{Дж}{м \cdot с} \cdot \frac{м}{К} = \frac{Дж}{м \cdot с \cdot К}$.

Ур-е теплопроводности.

Теплопроводность – ед. вр., коэф-т, характеризующий способность тела проводить тепло и град температур.



$\Delta Q_x = j_x S \Delta t$

Дж. выделяется:

$\Delta Q_x(x+\Delta x) = j_x(x+\Delta x) S \Delta t$.

Превращение энергии:

$\Delta Q = \Delta Q_x(x) - \Delta Q_x(x+\Delta x) = S \Delta t [j_x(x) - j_x(x+\Delta x)]$

$= S \Delta t \left[j_x(x) - j_x(x) - \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x\right] = -S \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x$

$\Delta Q = -S \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x$

$\Delta Q = c \Delta m \Delta T$.

$c \Delta m \Delta T = -S \Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x$.

$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta x$

$c \rho \Delta T = -\Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}$

$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial j_x}{\partial x}$, $\Delta t \to 0$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho} \frac{\partial j_x}{\partial x}} \quad \leftarrow \quad j_x = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}.$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$ – ур-е теплопроводности.

где T – температура, t – время, x – координата, $\varkappa$ – коэф-т теплопроводности, c – удельная теплоемкость, ρ – плотность.

$\frac{\varkappa}{c\rho} = \underline{\chi}$ – коэф-т температуропроводности.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \qquad [\chi] = \frac{м^2}{с}.$$

§28. Тензор инерции

Твердое тело. Главные оси инерции.

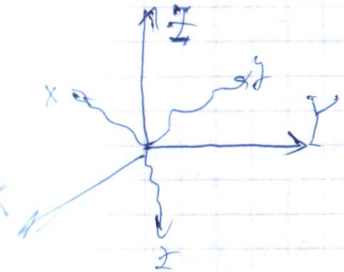
Твердое тело имеет $\vec{v} = \vec{0}$.



своб. движение.

$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{P} = const$

Как видно из опыта, в процессе полёта тело меняет свою ориентацию в пр-ве, а это значит, что будут меняться моменты инерции относительно осей координат, связанных с телом.



X, Y, Z – неподвижная с/к координат,

x, y, z – с/к координат, связанная с телом.

$$\vec{N} = \vec{N}(t), \quad \vec{V} = \vec{V}(t), \quad \vec{P} = \vec{P}(t).$$

Момент инерции тела.

$$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i, \quad \vec{N}_i = [\vec{r}_0, m_i \vec{v}_i]$$

§3 $\rightarrow \vec{v}_i = [\vec{\omega}_i, \vec{r}_i]$

$$\vec{N}_i = m_i [\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = m_i \{\vec{\omega} \vec{r}_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\omega})\}$$

Спроектируем это векторное равенство на оси координат, связанные с телом.

$$\begin{cases} r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ (\vec{r}_i, \vec{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z \end{cases}$$

$$N_{ix} = m_i \{\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)\}$$

$$\begin{cases} N_{ix} = m_i \{(y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z\} \\ N_{iy} = m_i \{-y_i x_i \omega_x + (z_i^2 + x_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z\} \\ N_{iz} = m_i \{-z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z\} \end{cases}$$

Просуммируем эти ур-я для всех точек тела.

$$N_x = J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z.$$

$$N_y = J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z.$$

$$N_z = J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z.$$

где $J_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$ – момент инерции тела отн. оси x

$$\begin{cases} J_{yy} = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) & \text{— м. инерции отн. оси } Oy \\ J_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) & \text{— отн. оси } Oz \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = J_{yx} \\ J_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = J_{zx} \\ J_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = J_{zy} \end{cases}$$

Тензор инерции твердого тела — это матрица, связывающая компоненты момента импульса с компонентами угловой скорости вращения тела.

Из такой связи компонент векторов следует, что они не параллельны друг другу ($\vec{N} \nparallel \vec{\omega}$).

В общем случае можно так выбрать оси Ox, Oy, Oz, что тензор инерции станет диагональным.

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

Такие оси x, y, z наз-ся главными осями инерции.

$$\begin{cases} N_x = J_x \omega_x \\ N_y = J_y \omega_y \\ N_z = J_z \omega_z \end{cases}$$

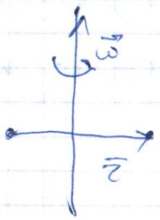
Как физически выделены главные оси?

Допустим, что мы вращаем тело вокруг одной из гл. осей.

$\omega_x \neq 0, \omega_y = 0, \omega_z = 0. \Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{\omega}.$

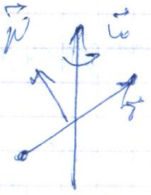
$N_x \neq 0, N_y = N_z = 0.$

Если тело вращ. вокруг одной из главных осей, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{\omega}$ совпадают друг с другом.



$\vec{N} = \sum (\vec{r}, m\dot{\vec{r}})$

главная ось



не главная ось

Ось симметрии тела — его главная ось.

Кинетическая энергия вращающегося тела

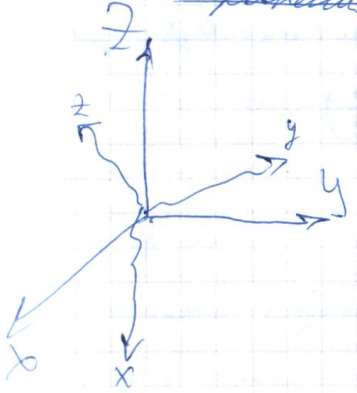
$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i \vec{v}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i [\vec{\omega}, \vec{r}_i] = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\omega}[\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{N} =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z) = \boxed{\frac{1}{2}(J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2) = K}$$

§29. Динамика твердого тела.

Уравнения Эйлера.



XYZ – лабораторная система

xyz – система тела

$$\begin{cases} K_x = J_x \omega_x \\ K_y = J_y \omega_y \\ K_z = J_z \omega_z \end{cases}$$

J_x, J_y, J_z – главные моменты инерции.

$\dot{\vec{N}} = \vec{M}$ – теорема моментов

Спроектируем это векторное равенство на главные оси инерции тела.

$\dot{\vec{N}} = \frac{d\vec{N}}{dt}$, где $d\vec{N}$ – приращение отн. лаб. сис-мы.

Выразим через $d'\vec{N}$ – приращ. $\vec{N}$ отн. сис-мы $d\vec{N} \neq d'\vec{N}$.

$$d\vec{N} = d'\vec{N} + [\vec{\omega}, \vec{N}]\,dt.$$

$$\left(\vec{v}_i = [\vec{\omega}_i, \vec{r}_i],\ d\vec{r}_i = [\vec{\omega}_i, \vec{r}_i]\,dt\right).$$

$$\frac{d'\vec{N}}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{N}] = \vec{M}.$$

$$[\vec{\omega}, \vec{N}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x\omega_x & J_y\omega_y & J_z\omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(J_z - J_y)\omega_y\omega_z + \vec{j}(J_x - J_z)\omega_x\omega_z + \vec{k}(J_y - J_x)\omega_x\omega_y.$$

$$\begin{cases} J_x \dfrac{d'\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x \\ J_y \dfrac{d'\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y \\ J_z \dfrac{d'\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z \end{cases}$$

Ур-я Эйлера.

Из решения этих ур-ий может найти $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ – проекции мгновенной угловой скорости на главные оси инерции тела.

$N_x(t) = J_x \omega_x(t)$, $N_y(t) = J_y \omega_y(t)$, $N_z(t) = J_z \omega_z(t)$.

Пример: свободное вращение симметричного волчка.

$\vec{M} = 0$.

Симметр. волчок – тело, у кот. совпадают 2 из 3 главных момента инерции

$J_x = J_y \neq J_z$

Обозначим $J_x = J_y = J_A$; $J_z = J_B$

$\omega_z(t) = \omega_{z_0} = const$,

$$\begin{cases} J_A \dot{\omega}_x + (J_B - J_A)\omega_y \omega_{z_0} = 0; \\ J_A \dot{\omega}_y - (J_B - J_A)\omega_x \omega_{z_0} = 0; \end{cases}$$

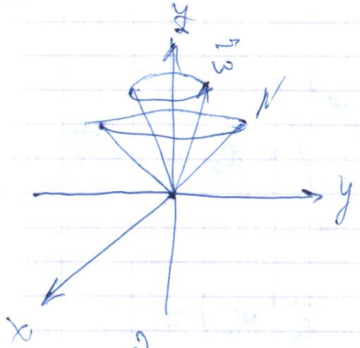
Обозначим, $\Omega = \dfrac{J_B - J_A}{J_A} \cdot \omega_{z_0}$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x + \Omega \omega_y = 0; \\ \dot{\omega}_y - \Omega \omega_x = 0; \end{cases}$$

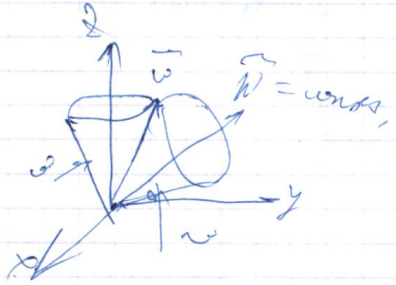
$\ddot{\omega}_x + \Omega \dot{\omega}_y = \ddot{\omega}_x + \Omega^2 \omega_x = 0$.

$$\begin{cases} \omega_x(t) = \omega_0 \cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_y(t) = \omega_0 \sin(\Omega t + \varphi) \\ \omega_z(t) = \omega_{z_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_x = N_0 \cos(\Omega t + \varphi), \quad N_0 = J_A \omega_0 \\ N_y = N_0 \sin(\Omega t + \varphi) \\ N_z = N_{z_0} = const; \end{cases}$$



отн. осей связанных с телом.



Будем считать что 2-ой конус катится без проск. по пов-ти I.

Свободный симм. волчок движ. так, как если бы он был выпрямлен в конус, когда

Без проскальзывания по кв-ти другого конуса.

Матрица поворота.

$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ $\qquad$ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ – лабор. орты.

$S_{ij}(t)$ – ? $\qquad$ $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$ – тела.

$\dot{S}_{ij} = \vec{e}_i \dot{\vec{e}}_j'$

$\dot{\vec{e}}_j' = [\vec{\omega}, \vec{e}_j']$

Пример: S_{11} – ?

$$\dot{\vec{e}}_1' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1'] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_3' \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_2' \omega_z - \vec{e}_3' \omega_y - \dot{e}_x'$$

$$\dot{S}_{11} = \bar{e}_1 \dot{\vec{e}}_1 = e_1 (\vec{e}_2' \omega_z - \vec{e}_3' \omega_y) =$$

$$= \boxed{\omega_z S_{12} - \omega_y S_{13} = S_{11}}.$$